Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen | **Blatt 06** | **12.05.2014**

Aufgabe 1: Digitale Optionen — 4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies Black-Scholes Modell mit deterministischer zeitabhängiger Volatilität σ und deterministischer zeitabhängiger Zinsrate r. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes erfüllt der Aktienpreisprozess also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(r(t) + \sigma(t)dW^*(t))$$

mit Anfangskurs $S_0 = x > 0$.

1. Berechnen Sie den Preis eines digitalen Calls, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis in T die Basis $K > 0$ überschreitet.
2. Berchnen Sie den Preis eines entsprechenden digitalen Puts, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis die Basis $K > 0$ unterschreitet.
3. Berechnen Sie für beide Optionen die jeweilige Hedgestrategie.
4. Wie kann für eine Funktion $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $\mathbb{E}^* h(S_T) < \infty$ der Preis eines Derivates mit Auszahlung $h(S_T)$ durch die Preise von digitalen Optionen ausgedrückt werden.

Aufgabe 2: — 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit konstanter Volatilität $\sigma > 0$ und Zinsrate $r \in \mathbb{R}$. Sei $C(x, t, \sigma, K, r)$ der Preis einer Calloption mit Basis K, Laufzeit t und Anfangsaktienkurs $x > 0$. Zeigen Sie für alle $t > 0, x > 0$

1. $\Delta_t = \partial_x C(x, t, \sigma, K, r) = \Phi(h_1(x, t))$ — Delta der Option
2. $\Gamma_t = \partial_x^2 C(x, t, \sigma, K, r) = \frac{\phi(h_1(x,t))}{x\sigma\sqrt{t}}$ — Gamma der Option
3. $\kappa_t = \partial_K C(x, t, \sigma, K, r) = -e^{-rt}\Phi(h_2(x, t))$ — Kappa der Option
4. $\mathcal{V}_t = \partial_\sigma C(x, t, \sigma, K, r) = x\sqrt{t}\phi(h_1(x, t))$ — Vega der Option
5. $\rho = \partial_r C(x, t, \sigma, K, r) = tKe^{-rt}\Phi(h_2(x, t))$ — Rho der Option
6. $\Theta_t = \partial_t C(x, t, \sigma, K, r) = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\phi(h_2(x, t)) + rKe^{-rt}\Phi(h_2(x, t))$ — Theta der Option

mit $h_1(x,t) = \frac{\log\frac{x}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$, $h_2(x,t) = \frac{\log\frac{x}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$.
Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt, der die NFLVR Bedingung erfüllt und definieren, dass es einen Martingalhedge für einen Claim C gibt, wenn ein previsibles H, ein $x \in \mathbb{R}$ und ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existieren, so dass

$$x + \int_0^T H(u)dS^*(u) = C^*$$

gilt und $(x + \int_0^t H(u)dS^*(u))_{0\le t<T}$ ein gleichgradig integrierbares $\mathbb{P}^*$-Martingal bildet.

Zeigen Sie im Falle von beschränktem C^*, dass C genau dann hedgebar ist , wenn es einen Martingalhedge für C gibt.

Aufgabe 4: Firmenwertansatz von Merton 4 Punkte

Der Firmenwertansatz von Merton ist eine Methode ausfallgefährdete Unternehmensanleihen mit Optionspreistheorie zu bewerten. Im ursprünglichen einfachsten Modell wird eine Firmenwertentwicklung (X_t) der Form

$$dX(t) = X(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert $x_0 > 0$ angenommen. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass Kapital auf einem Geldmarktkonto sich mit der konstanten Rate $r > 0$ verzinst.

Ein Fremdkapitalgeber der Firma leiht der Firma einen Nominalbetrag F für T Zeiteinheiten. Dieser Kredit kann dann zurückgezahlt werden, wenn das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt T die Verbindlichkeit F übersteigt. Reicht das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt T nicht aus, um die Verbindlichkeit vollständig zu begleichen, muss die Firma Konkurs anmelden und die Konkursmasse zur weitestgehenden Begleichung der Schulden benutzen.

Das Eigenkapital der Firma zur Zeit t ist das Vermögen zu diesem Zeitpunkt vermindert um den Wert des Fremdkapitals zur Zeit t.

1. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass das gesamte Fremdkapital nur von einer Adresse gegeben wird, den Wert der Position des Fremdkapitalgebers. Hinweis: Wie können Sie die Position des Fremdkapitagebers durch ein Derivat beschreiben.

2. Wie können Sie die Position des Eigenkapitalgebers durch ein Derivat beschreiben und wie können Sie diese bewerten.

Abgabe: Die. 20.05.2014 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131