Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen | **Blatt 04** | **29.04.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein eindimensionales Black-Scholes Modell, in dem der Aktienkurs die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

erfüllt bei Anfangskurs $S_0 > 0$. Weiter gehen wir von einer konstanten Verzinsung auf dem Geldmarktkonto aus. Bestimmen Sie eine Hedgestrategie für eine Calloption mit Basis K zum Ausübungszeitpunkt T.

Gesucht ist also ein previsibles H und ein Anfangskapital V_0, so dass

$$V_0 + \int_0^T H(u)dS^*(u) = e^{-rT}(S(T) - K)^+$$

gilt und dass $\int_0^t H(u)dS^*(u)$ ein Martingal bildet bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Hinweis: Blatt 1 Aufgabe 2 und Ito-Formel. Die Hedgestrategie wird übrigens Δ-Hedge genannt.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell, dass von zwei Wiener-Prozessen getrieben wird. Dies bedeutet, dass der Preisprozess des risikobehafteten Finanzgutes die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 dW_2(t))$$

für alle $0 \leq t < T$ erfüllt bei einem Anfangswwert $S(0) > 0$. Hierbei sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\sigma \neq 0$. Das Geldmarktkonto verzinst sich mit fester Zinsrate $r \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Menge $\mathfrak{P}^*$ der äquivalenten Martingalmaße.
2. Bestimmen Sie
$$\mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)}$$
für alle $\mathbb{P}^* \in \mathfrak{P}^*$ für eine Call-Option mit Auszahlung $C = (S_T - K)^+$ zum Ausübungszeitpunkt T .
3. Bestimmen Sie ein $\mathfrak{F}_T$-messbares C, so dass
$$\inf_{\mathbb{P}^* \in \mathfrak{P}^*} \mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)} < \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathfrak{P}^*} \mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 3: Kanonisches mehrdimensionales Black-Scholes Modell 4 Punkte

Wir betrachten ein mehrdimensionales Black-Scholes Modell für d Aktien der Form

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_j(t))$$

für alle $1 \leq i \leq d$, wobei die Dimension des treibenden Wiener-Prozesses $n \geq d$ erfülle. Weiter nehmen wir an, dass die Matrix $\sigma\sigma^T$ positiv definit ist.

Zeigen Sie, dass es eine untere Dreiecksmatrix C und einen d-dimensionalen Standard Wiener-Prozess B gibt, so dass S die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{i} c_{ij} dB_j(t)$$

für alle $1 \leq i \leq d$ erfüllt.

Das so formulierte Modell kann als kanonisch angesehen werden.

Hinweis: Cholesky Zerlegung

Aufgabe 4: 4 Punkte

Geben Sie in einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten einen Claim C, eine zulässige Handelsstrategie H und ein Anfangskapital V_0 an, so dass

$$C^* = V_0 + \int_0^T H(t) dS^*(t)$$

gilt, aber H kein Hedge für C ist.

Abgabe: Die. 29.04.2013 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131