Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 03** **22.04.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit Informationsverlauf gegeben durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse W_1, W_2 und nehmen an, dass unter einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß P die augenblickliche Zinsrate eines Geldmarktkontos sich entwickelt entsprechend

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW_1(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b, \delta > 0$.

Das Geldmarktkonto entwickelt sich also entsprechend

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$.

Weiter ist in diesem Finanzmarkt eine Aktie mit Preisprozegeben $S(t)$ gegeben durch

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_2(t)) \quad , S(0) = x_0 > 0$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

1. Ist das Modell arbitragefrei?

2. Ist gegebenenfalls das äquivalente Martingalmaß eindeutig?

3. Führen Sie einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ durch, so dass die Dynamik der Zinsrate r erhalten bleibt und die der Aktie gegeben ist durch

   $$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma d\bar{W}_2(t))$$

   mit Wiener-Prozess $\bar{W}_2$ bezüglich $\mathbb{P}^*$.

4. Berechnen Sie für eine Call-Option mit Laufzeit T

   $$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ und S eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

für alle $0 \leq t < T$ bei einem Anfangswert $S(0) > 0$. Sei weiter $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichtequotientenprozess

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\right)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ für einen vorhersehbaren Prozess θ, der $\int_0^T \theta^2(s)ds < \infty$ erfüllt. Schließlich sei $S^*(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)S(t)$ definiert für alle $0 \leq t < T$ mit $r(t) = \mu(t) - \theta(t)\sigma(t)$.

1. Bestimmen Sie einen vorhersehbaren Prozess $H(t)_{0\leq t<T}$ mit $\int_0^t H^2(s)\sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $0 \leq t < T$ und ein Anfangskapital V_0, so dass
$$\frac{1}{L_T} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt.

2. Ist θ eine deterministische Funktion, so bestimmen Sie für $\gamma > 0$ einen vorhersehbaren Prozess $H(t)_{0\leq t<T}$ mit $\int_0^t H^2(s)\sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $0 \leq t < T$ und ein Anfangskapital V_0, so dass
$$\frac{1}{L_T^\gamma} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozess und S eine Lösung von

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert $S(0) > 0$, wobei $r \in \mathbb{R}$ eine konstante Zinsrate und $\sigma > 0$ eine konstante Volatilität bezeichnen. Bestimmen Sie den Preis eines Derivates, dass in $T > 0$ die Auszahlung $S(T)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ liefert, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT} S(T)^\alpha.$$

Berechnen Sie ferner den Preis einer Call-Option auf $S(T)^\alpha$, i.e.

$$\mathbb{E}\, e^{-rT}(S(T)^\alpha - K)^+.$$

Abgabe: Die. 29.04.2014 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131