Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen | **Blatt 02** | **15.04.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Gegeben sei ein Finanzmarktmodell, dass die in der Vorlesung geforderten Annahmen für einen n dimensionalen Wiener-Prozess W erfüllt. Der Preisprozess des risky assets erfüllt also die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(t)dW_j(t)).$$

für $t < T$ bei einem Anfangswert S_0. Zeigen Sie, dass es einen eindimensionalen Wiener-Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ und einen bezüglich der von W erzeugten Wiener-Filtration vorhersehbaren Prozess λ gibt mit

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \lambda(t)dB(t))$$

für alle $0 \leq t < T$.

Ist S ein Semimartingal bezüglich der von B erzeugten Wiener-Filtration?

Den Prozess λ kann man als Volatilität der Aktie ansehen.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten ein von einem n-dimensionalen Wiener-Prozess W getriebenen Finanzmarkt bestehend aus zwei risky assets ohne Geldmarktkonto. Diese erfüllen die stochastische Differentialgleichungen

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{i,j}(t)dW_j(t))$$

für $i = 1, 2$ und $0 \leq t < T$. Wie kann man sinnvollerweise einen Handel in diesem Finanzmarkt erklären und wie kann man den Begriff der Selbstfinanzierung formulieren? Formulieren und beweisen Sie ein zur Vorlesung analoges Resultat, dass die Selbstfinanzierung durch das Anfangskapital und die Position in einem Finanzgut charakterisiert.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell der Form

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t)rdt \\ dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sigma dW(t) \end{aligned}$$

mit $\mu, r \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

Zeigen Sie, dass dieses Modell Arbitragemöglichkeiten besitzt.

Hinweis: In der Vorlesung ist dies für den Fall $\mu = r$ gezeigt worden.

Aufgabe 4: Exchange Option 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei risky assets S_1, S_2, deren Preisprozesse die folgenden stochastischen Differentialgleichungen erfüllen.

$$dS_i(t) = S_i(t)\sigma_i(t)dW_i(t)$$

bei positiven Anfangswerten $S_i(0)$ für $i = 1, 2$ und $0 \leq t < T$ mit deterministischen Koeffizientenfunktionen σ_1, σ_2, die $\int_0^T \sigma_i^2(s)ds < \infty$ für $i = 1, 2$ erfüllen.

Berechnen Sie

$$\mathbb{E}(S_1(T) - S_2(T))^+.$$

Dies kann als Preis einer Exchangeoption ansehen werden. Die Exchangeoption gibt dem Inhaber das Recht, das risky asset S_2 gegen das risky asset S_1 im Zeitpunkt T zu tauschen.

Hinweis: Die Berechnung des obigen Erwartungswertes ist nicht schwieriger als die Berechnung des Black-Scholes Preises. Sie können geschickt den Satz von Girsanov anwenden und letzlich die zu berechnenden Erwartungswerte auf Normalverteilungswahrscheinlichkeiten zurückführen.

Abgabe: Die. 22.04.2014 bis spätestens 11.00 Uhr im Fach 131