Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 01** **08.04.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie:

1. $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ ist stochastische unabhängig von $\mathfrak{F}_t$ für alle $t, h \geq 0$.
2. Durch $L_t = \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds)$ für alle $t \geq 0$ wird ein Martingal definiert.

Hinweis: Sie können hierbei ohne Beweis benutzen, dass $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ eine $N(0, \int_t^{t+h} \sigma^2(s)ds)$-verteilte Zufallsvariable ist. Wie könnte man dies denn beweisen?

Aufgabe 2: Black-Scholes Modell mit deterministischen Koeffizienten 4 Punkte

In einem Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilität erfüllt der Aktienpreisprozess $(S_t)_{0\leq t<T}$ die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)), 0 \leq t < T$$

mit Startwert S_0. Die Koeffizienten μ und σ werden hierbei als deterministische messbare Funktionen vorausgesetzt, die $\int_0^t |\mu(s)|ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ erfüllen.

Im sogenannten risikoneutralen Fall stimmt die Driftfunktion μ der Aktie mit der Zinsratenfunktion r des Geldmarktkontos überein.

1. Berechnen Sie den arbitragefreien Preis zur Zeit t einer Calloption mit strike K zum Ausübungszeitpunkt T, i.e.

   $$v(t,y) = \mathbb{E}\big(\exp(-r(s)ds)(S_T - K)^+|S(t) = y)$$

   für alle $0 \leq t < T$ und $y > 0$. Als Lösung ergibt sich

   $$v(t,y) = y\Phi(\frac{\log\frac{y}{K} + \int_t^T r(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}) - Ke^{-\int_t^T r(s)ds}\Phi(\frac{\log\frac{y}{K} + \int_t^T r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}})$$

2. Zeigen Sie, dass die Preisfunktion $v(t,y)$ die partielle Differentialgleichung

   $$\partial_t v + r(t)y\partial_y v + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\partial_y^2 v = r(t)v$$

   auf $[0,T) \times (0,\infty)$ erfüllt mit Randbedingung

   $$\lim_{t\to T} v(t,y) = (y-K)^+$$

   für alle $y > 0$.

Hinweis: Sie können den ersten Teil ohne großartige Rechnung mit Hilfe einer geschickten Anwendung des Satzes von Girsanov zeigen. Den zweiten Teil können sie vom Prinzip durch Einsetzen ausrechnen. Sie können aber auch mit der Ito-Formel argumentieren, da $(\exp(-\int_0^t r(s)ds)v(t,S(t)))_{t<T}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien W_1, W_2 Wiener-Prozesse auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ mit $\langle W_1, W_2\rangle_t = \rho t$ für ein $\rho \in (-1,1)$. Definiere geometrische Wiener-Prozesse durch

$$S_i(t) = S_i(0)\exp(\int_0^t \mu_i(s)ds)\exp(\int_0^t \sigma_i(s)dW_i(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_i^2(s)ds)$$

für $i = 1,2$, wobei $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ deterministische Koeffizientenfunktionen sind.

Fixiere ein $T > 0$.

1. Wann existiert ein zu $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q, so dass $(\frac{S_2(t)}{S_1(t)})_{0\le t<T}$ ein lokales Martingal ist bezüglich Q?
2. Bestimmen Sie bezüglich Q die Dynamik von S_1, S_2 sowie $\frac{S_1}{S_2}$.

Abgabe: Die. 15.04.2013 bis spätestens 11.00 Uhr im Fach 131