Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 12** **05.07.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien E, F Hilberträume und $I : E \to F$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass das Bild von E unter I einen abgeschlossenen Teilraum von F bildet.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Jedes stetige, lokale Martingal ist eine zeittransformierte Brownsche Bewegung. Genauer sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M(0) = 0$ und $[M]_t \uparrow \infty$ für $t \uparrow \infty$. Für $t \geq 0$ definiere die Stopzeit

$$\tau_t = \inf\{u : [M]_u > t\}$$

und setze $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{\tau_t}$ für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie, dass $B_t = M(\tau_t), t \geq 0$ einen Standard Wiener-Prozess bezüglich der $(\mathfrak{G}_t)$ Filtration definiert. Mehr noch, es gilt $[M]_t$ ist eine $(\mathfrak{G}_s)$ Stopzeit für alle $t \geq 0$ und

$$M_t = B([M]_t)$$

für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Satz von Lévy.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Finanzmarktmodell mit einem risky asset und zwei Quellen der Unsicherheit. Sei W ein zweidimensionaler Wiener-Prozeß und S als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW^{(1)}(t) + \sigma_2 dW^{(2)}(t)), S(0) = x,$$

ein Preisprozeß eines risky assets. Hierbei sind σ_1, σ_2, μ reelle Konstanten mit $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Für den Handelszeitraum $[0, T)$ besteht der Finanzmarkt aus dem risky asset und einem Bankkonto mit Preisprozeß gegeben durch $\beta(t) = \exp(rt)$.

1. Zeigen Sie, dass es ein äquivalentes Martingalmaß in diesem Modell gibt.
2. Ist dieses eindeutig bestimmt?

Bitte wenden!

Aufgabe 4: 4 Punkte

Bestimmen Sie in der Fortsetzung von Aufgabe 3 einen eindimensionalen Wiener-Prozeß B, derart, dass

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_3 dB(t))$$

gilt für ein geeignetes $\sigma_3 > 0$. Bezüglich der von B erzeugten Filtration liegt dann ein Black-Scholes Modell vor. Diese Filtration stimmt mit der von S erzeugten überein.

Hinweis: Wieso ist $\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}(\sigma_1 W^{(1)}(t) + \sigma_2 W^{(2)}(t))$ ein Wiener-Prozeß?

Abgabe: Mo. 12.07.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 14.07.2010. 12.00-14.00 M5