Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **29.06.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

In einem Black-Scholes Modell mit deterministischen, aber zeitlich variablen Koeffizienten ist der Aktienpreisprozeß gegeben durch die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad , \quad S(0) = x$$

für den Handelszeitraum $[0, T]$. Dabei sind $\mu, \sigma : [0, T] \to \mathbb{R}$ meßbare Koeffizientenfunktionen mit

$$\int_0^T |\mu(s)|ds < \infty \quad , \quad \int_0^T \sigma^2(s)ds < \infty$$

und $\sigma(t) > 0$ für alle $t > 0$.

Ferner ist ein Bankkontoprozeß gegeben durch

$$\beta(t) = \exp(rt), 0 \leq t \leq T.$$

1. Lösen Sie die obige stochastische Differentialgleichung.
2. Führen Sie ein Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ durch.
3. Was für eine stochastische Differentialgleichung erfüllt S bezüglich dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

In Fortsetzung von Aufgabe 1 definiert $S^*(t) = e^{-rt}S(t), 0 \leq t \leq T$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$.

1. Geben Sie die Darstellung als Exponentialmartingal von S^*/x an.
2. Betrachte das Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$, dessen Dichtequotientenprozeß bezüglich $\mathbb{P}^*$ definiert ist durch S^*/x. Was für eine Verteilung hat $\log(S_T)$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ und welche bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: 4 Punkte

Berechnen Sie in Fortsetzung der ersten beiden Aufgaben den Preis einer Call Option im Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen deterministischen Koeffizienten.

Hinweis: Sie können ohne große Rechnung die Formel analog zum Fall konstanter Koeffizienten herleiten.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozeß. Der komplexwertige Prozeß M ist definiert durch

$$M(t) = \exp(i\theta W(t) + \frac{1}{2}\theta^2 t) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)(\cos(\theta W(t)) + i\sin(\theta W(t)))$$

mit $\theta \in \mathbb{R}$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.

Zeigen Sie durch Anwenden der Ito Formel auf Real- und Imaginärteil, dass M die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt.

$$dM(t) = M(t) i\theta dW(t).$$

Somit ist M ein komplexwertiges Martingal mit Dartsellung $M(t) = U(t) + iV(t)$, wobei $U(t) = \int_0^t -\Im(M(s))\theta dW(s), V(t) = \int_0^t \Re(M(s))\theta dW(s)$.

Hinweis: Sie können die folgende Version des Satzes von Girsanov benutzen.

Ist W ein Wiener-Prozeß bezüglich $\mathbb{P}$ und

$$L_t = \exp(\int_0^t H(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t H(s)^2 ds)$$

ein Martingal, so definiert

$$\bar{W}(t) = W(t) - \int_0^t H(s)ds$$

einen Wiener-Prozeß bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\bar{\mathbb{P}}$, wobei der Dichtquotientenprozeß von $\bar{\mathbb{P}}$ bezüglich $\mathbb{P}$ durch L gegeben ist.

Abgabe: Mo. 05.07.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 07.07.2010. 12.00-14.00 M5