Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **21.06.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien $F, G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen von beschränkter Variation, rechsseitig stetig mit $F(0) = G(0) = 0$. Zeigen Sie

$$F(T)G(T) = \int_{(0,T]} F(t-)dG(t) + \int_{(0,T]} G(t-)dF(t) + \sum_{0<s\leq T} \Delta F(s)\Delta G(s).$$

Hinweis: Betrachten Sie, dass durch F, G definierte signierte Produktmaß. Was ist das Maß des Quadrates $(0, T] \times (0, T]$. Teilen Sie das Quadrat in oberes, unteres Dreieck und Hauptdiagonale auf und verwenden Sie den Satz von Fubini zur Berechnung des Maßes der drei Teilmengen.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, daß jedes lokale stetige Matingal M mit $M(0) = 0$ die Gleichung

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + [M]_t$$

für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}-$ fast sicher erfüllt.

Hinweis: Dehnen Sie das bekannte Resultat für beschränkte Martingale per Lokalisation aus auf lokale stetige Martingale.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Die Hermite Polynome $H_n(x, t)$ sind rekursiv definiert durch $H_0(x, t) = 1, H_1(x, t) = x$ sowie

$$H_{n+1}(x, t) = xH_n(x, t) - tnH_{n-1}(x, t).$$

Zeigen Sie, daß für einen Wiener-Prozeß W der Prozeß $M_n(t) = H_n(W_t, t)$ ein lokales Martingal definiert mit quadratischer Variation

$$[M_n]_t = n^2 \int_0^t H_{n-1}(W(s), s)^2 ds.$$

Hinweis: Ito-Formel

Bitte wenden!

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei X Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, X(0) = x_0,$$

wobei $\alpha > 0$ ist.

1. Bestimmen Sie die Lösung der obigen stochastischen Differentialgleichung,
2. Bestimmen Sie die Verteilung von X_t für jedes $t \geq 0$.
3. Was ist die Grenzverteilung für X_t für $t \to \infty$.

Abgabe: Mo. 28.06.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 30.06.2010. 12.00-14.00 M5