Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 9** **14.06.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass der quadratische Variationsprozeß die folgenden Eigenschaften besitzt.

1. $[cM] = c^2[M]$ für alle $c \in \mathbb{R}, M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$,
2. $[M+N] + [M-N] = 2([M]+[N])$ für alle $M, N \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$.

Zeigen Sie die Bilinearität der dazugehörigen quadratischen Kovariation.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei U ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_2$, der invariant ist unter Stoppen. Zeigen Sie, daß das orthogonale Komplement V von U auch invariant ist unter Stoppen. Dabei heißen zwei Martingale $M, N \in \mathcal{H}_2$ senkrecht zueinander, falls $\mathbb{E}M_\infty N_\infty = 0$ gilt.

Zeigen Sie weiter, dass im obigen Falle U, V auch stark komplementär sind. Dies bedeutet, dass für Martingale $M \in U$ und $N \in V$ die quadratische Kovariation $[M, N] = 0$ ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei M ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Mit $L_2^{loc}(M)$ bezeichne die Menge der previsiblen Prozesse H, die $\int_0^t H_s^2 d[M]_s < \infty$ $\mathbb{P}-$ fast sicher erfüllen für jedes $t > 0$.

Zeigen Sie, dass die lokal beschränkten Prozesse eine echte Teilmenge von $L_2^{loc}(M)$ bilden.

Wie kann sinnvoll für ein lokales Martingal M und $H \in L_2^{loc}(M)$ der stochastische Integralprozeß definiert werden.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei M ein L_2- Martingal mit stetigen Pfaden. Zeigen Sie, dass $M^2 - [M]$ ein Martingal ist.

Alternativ zu Aufgabe 4 kann auch die Aufgabe 5 bearbeitet werden.

Aufgabe 5: 4 Punkte

Sei W ein Wienerprozeß und $M_t = W_t^2 - t$ gesetzt für $t \geq 0$. Was ist die quadratische Variation von $[M]$.

Abgabe: Mo. 21.06.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 23.06.2010. 12.00-14.00 M5