Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 8** **07.06.2010**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei M ein stetiges, beschränktes Martingal mit $M(0) = 0$. Zeigen Sie:

1. Hat M Pfade von beschränkter Variation, so gilt $M = 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher.
2. Es gibt genau einen adaptierten Prozeß A mit $A(0) = 0$, stetigen, monoton wachsenden Pfaden, so dass $M^2 - A$ ein $\mathcal{H}^2-$ Martingal definiert.
3. Für jede Stopzeit τ stimmt der durch τ gestoppte quadratische Variationsprozeß von M mit dem quadratischen Variationsprozeß des durch τ gestoppten Martingals M überein, i.e.
$$[M]^\tau = [M^\tau].$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei M ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden und $M(0) = 0$. Zeigen Sie, dass es bis auf Nichtunterscheidbarkeit genau einen stochastischen Prozeß $[M]$ gibt mit folgenden Eigenschaften

1. $[M]_0 = 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher,
2. $[M]$ ist adaptiert mit stetigen und wachsenden Pfaden,
3. $M^2 - [M]$ ist ein lokales Martingal.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Sei W ein Wienerprozeß. Für eine linksseitig stetige reelle Funktion f mit $\int_0^t f^2(s)ds < \infty$ für jedes $t \geq 0$ definiere den Prozeß

$$M_t = \int_0^t f(s)dW_s$$

f.a. $t \geq 0$. Zeigen Sie

1. M ist ein L_2 Martingal,
2. M hat unabhängige Zuwächse,
3. $[M]_t = \int_0^t f(s)^2 ds$ für alle $t \geq 0$.
4. M ist ein Gauß-Prozeß, d.h. jedes M_t ist normalverteilt.

Abgabe: Mo. 14.06.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 16.06.2010. 12.00-14.00 M5