

Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 7

31.05.2010

Aufgabe 1:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass jedes beschränkte lokale Martingal ein Martingal ist.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Zeigen Sie, dass ein nichtnegatives lokales Martingal ein Supermartingal ist.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Sei H ein lokal beschränkter Prozeß und M ein stetiges lokales Martingal. Zeigen Sie:

1. Die Definition von $H \cdot M$ hängt nicht von der reduzierenden Folge von Stopzeiten ab.
2. Der stochastische Integralprozeß kann in eindeutiger Weise fortgesetzt werden.
3. Die Fortsetzung ist bilinear.
4. Die Fortsetzung ist verträglich mit Stoppen, d.h.

$$(H \cdot M)^\tau = H1_{(0,\tau]} \cdot M^\tau.$$

für jede Stopzeit τ .

Aufgabe 4:

4 Punkte

Ein stochastischer Prozeß X ist aus der Klasse DL genau dann, wenn die Familie der Zufallsvariablen

$$\{X_\tau : \tau \text{ beschränkte Stopzeit}\}$$

gleichgradig integrierbar ist. Zeigen Sie:

Ein lokales Martingal X ist ein Martingal genau dann, wenn X aus der Klasse DL ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5:

4 Punkte

Anstelle der Aufgabe 4 können Sie auch die folgende Aufgabe bearbeiten.

Sei W ein Wienerprozeß, $Y = W \cdot W$ und $Z = W^2 \cdot W$.

1. Berechnen Sie: $\mathbb{E}Y_T, \text{Var}Y_T, \mathbb{E}Z_T, \text{Var}Z_T$ für $T > 0$
2. Simulieren Sie einen Pfad bis T von Y bzw Z . Hinweis: Zerlegen Sie $[0, T]$ in n äquidistante Teilintervalle und erzeugen Sie rekursive den Prozeß an den Intervallendpunkten mittels $dY_t = W_t dW_t \approx W_{t_{j-1}} \Delta W_{t_j}$.
3. Erzeugen Sie N Pfade, um approximativ $\text{Var}Y_T$, bzw. $\text{Var}Z_T$ zu bestimmen.

Hinweis: Ich bitte alle diejenigen, die in den nächsten 3 Monaten eine Diplomarbeit bei mir beginnen wollen und noch nicht auf der Liste meiner Homepage geführt sind, sich bei mir per e-mail bis zum 1. Juli zu melden. Ich möchte gerne einen Überblick über die zu erwartenden Diplomarbeiten bekommen.

Abgabe: Mo. 07.06.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 09.06.2010. 12.00-14.00 M5