

Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 6

17.05.2010

Aufgabe 1:

4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozeß und $\tau_a = \inf\{t > 0 : W_t = a\}$ für $a > 0$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\tau_a = +\infty.$$

Hinweis: Es gibt zumindest drei Möglichkeiten der Argumentation. Mit Hilfe des Spiegelungsprinzips kann man die Dichte der Stopzeit explizit ausrechnen. Die Laplacetransformierte ist in Blatt 5 ausgerechnet worden. Schließlich ist auch eine geschickte Argumentation über Optional Sampling möglich.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Sei M ein L_2 Martingal mit cadlag Pfaden und H ein elementar previsibler Prozeß der Form

$$H = \sum_{j=0}^n \alpha_j 1_{R_j}$$

mit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, wobei R_0, R_1, \dots, R_n paarweise disjunkte previsible Rechtecke der Form $R_0 = \{0\} \times F_0, R_j = (s_j, t_j] \times F_{s_j}, j = 1, \dots, n$ bezeichnen. Zeigen Sie

$$(H \cdot M)_t = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{F_{s_j}} (M(t \wedge t_j) - M(t \wedge s_j))$$

für alle $t \geq 0$ \mathbb{P} - fast sicher.

Insbesondere ist $(H \cdot M)(0) = 0$ \mathbb{P} - fast sicher.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Sei M ein L_2 Martingal mit cadlag Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$. Zeigen Sie:

- $(H \cdot M)(0) = 0$ \mathbb{P} - fast sicher,
- $\mathbb{E}(H \cdot M)(\tau) = 0$ für jede Stopzeit τ .
- Hat M stetige Pfade, so ist $H \cdot M \in \mathcal{H}_{2,c}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4:

4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozeß und für $b > 0$

$$\tau = \tau_b = \inf\{t \geq 0 : W(t) = b\},$$

sowie für $a < 0$

$$\sigma = \sigma_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : W(t) = a \text{ oder } W(t) = b\}.$$

Welche der folgenden Prozesse sind Martingale, gleichgradig integrierbare Martingale sowie in L_2 - beschränkte Martingale.

$$W^\tau, W^\sigma, M_\theta^\tau, M_\theta^\sigma$$

mit $M_\theta(t) = \exp(\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t)$ für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Mo. 31.05.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 02.06.2010. 12.00-14.00 M5