Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 5** **10.05.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Menge der Martingale in $\mathcal{H}_2$, die stetige Pfade besitzen, einen abgeschlossenen Teilraum von $\mathcal{H}_2$ bildet.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares rechtsseitig stetiges Martingal. Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable X_∞ gibt mit

$$X_t \to X_\infty$$

$\mathbb{P}$- fast sicher und in L_1. Weiter gilt für jede Stopzeit τ

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathfrak{F}_\tau) = X_\tau$$

$\mathbb{P}$- fast sicher.

Hinweis: Approximieren Sie τ durch Stopzeiten, die nur Werte auf abzählbaren Gittern annehmen können und wenden Sie den Martingalkonvergenzsatz für Rückwärtsmartingale an.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ ein stochastischer Prozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Zeigen Sie:

X ist ein gleichgradig integrierbares Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

gilt für alle Stopzeiten τ.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozeß und

$$\tau_a = \inf\{t > 0 : W_t = a\}$$

für jedes $a > 0$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\exp(-\lambda\tau_a) = \exp(-a\sqrt{2\lambda}).$$

Hinweis: Aufgabe 3

Abgabe: Mo. 17.05.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 19.05.2010. 12.00-14.00 M5