Übungen zur Vorlesung Zeitstetige Modelle der Finanzmathematik

Sommersemester 2010

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 4** **03.05.2010**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei M ein rechtsseitig stetiges L_2-Martingal und σ, τ Stopzeiten mit $\sigma \leq \tau \leq T$ für ein festes $T > 0$. Zeigen Sie:

1. Hat τ nur endlich viele Werte, so ist $1_{(0,\tau]}$ ein elementar preversibler Prozess und
$$\int 1_{(0,\tau]} dM = M(\tau) - M(0).$$
2. Das stochastische Intervall $1_{(\sigma,\tau]}$ hat endliches Doleansmaß und
$$\int 1_{(\sigma,\tau]} dM = M(\tau) - M(\sigma).$$
3. Ist Y eine $\mathfrak{F}_\sigma$ meßbare Abbildung mit $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, so ist $H = Y 1_{(\sigma,\tau]}$ ein previsibler Prozeß, quadrat integrierbar bezüglich des Doleansmaßes mit
$$\int H dM = Y(M(\tau) - M(\sigma)).$$

Aufgabe 2: 6 Punkte

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ und $\eta : [0, \infty) \to [0, T)$ eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion mit $\eta(0) = 0$. Definiere den stochastischen Prozeß $(M_t)_{t \geq 0}$ durch
$$M_t = W(\eta(t))$$
und die Filtration $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{\eta(t)}$ für alle $t \geq 0$.

1. Zeigen Sie, dass M ein rechtsseitig stetiges L_2-Martingal bezüglich $(\mathfrak{G}_t)_{t \geq 0}$ ist.
2. Bestimmen Sie das zu M gehörige Doleansmaß.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ ein Wiener Prozeß. Welche der folgenden stochastischen Prozesse sind gleichgradig integrierbar?

$(W_t)_{t \geq 0}$, $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $T > 0$, $(\exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t))_{t \geq 0}$, $(\exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t))_{0 \leq t \leq T}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Mo. 10.05.2010 bis spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 12.05.2010. 12.00-14.00 M5