Universität Münster
Mathematische Statistik

Existenz von Gleichgewichtspreisen bei Unsicherheit

Name des Dozenten
Herr Dr. Paulsen

von
Sven Lammers
Matrikelnr.: 340056
20.06.2010

Abstract

In dieser Seminararbeit wird es um Gleichgewichtspreise bei Unsicherheit gehen, wobei Unsicherheit bedeutet, dass die Akteure im Jetzt nicht wissen, wie sich Preise und oder Verfügbarkeiten von Gütern zu zukünftigen Handelszeitpunkten entwickeln. Die unterschiedlichen Entwicklungsmöglichkeiten werden dabei als mögliche Zustände der Welt (states of the world) bezeichnet. Ziel aller Akteure ist es wiederum, unter Berücksichtigung der Unsicherheit Konsumkombinationen zu finden, welche ihren jeweiligen Nutzen maximieren.

Dabei wird zunächst in möglichst einfacher Weise von einer statischen Tauschwirtschaft zu einer Tauschwirtschaft mit Unsicherheit übergegangen und der Begriff des *Arrow-Debreau*-Gleichgewichts definiert. Die Existenz dieses Gleichgewichts unter bestimmten Annahmen bezüglich der Präferenzen der Akteure wurde bereits im letzten Vortrag bewiesen. Anschließend wird unter Hinzunahme eines Finanzmarktes zur Tauschwirtschaft das *Radner*-Modell eingeführt, wobei die Motivation darin liegt, die Anzahl der für eine Organisation der Wirtschaft nötigen offenen Märkte zu reduzieren. Beide Begriffe werden dann in einem Äquivalenztheorem in Verbindung gebracht.

Als Letztes wird das *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* angesprochen, eine Erweiterung des *Radner*-Modells, mit nicht mehr endlich vielen möglichen Zuständen in der Zukunft.

1 Tauschwirtschaft bei Unsicherheit in zwei Zeitpunkten

Dieses Modell wird durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

- zwei Zeitpunkte t_1, t_2
- m Akteure
- l Konsumgüter
- k mögliche Zustände in t_2

Von t_1 aus gesehen ist die Zukunft t_2 unsicher. Folgende Annahmen gelten:

- alle Güter sind immer verfügbar
- es existiert die Möglichkeit, Verträge über die Lieferung von Gütern in der Zukunft abzuschließen (Future-Handel) unter der Bedingung bestimmter eintretender Zustände
- die Akteure können Konsumpläne $c_i = (c_i(1), ..., c_i(k)) \in (\mathbb{R}^l_+)^k$ erstellen, wobei $c_i(j) \in \mathbb{R}^l$ den Konsumplan des Akteurs i im Zustand j darstellt.

- die Akteure besitzen Präferenzen, dargestellt durch die Nutzenfunktionen $u_i : (\mathbb{R}^l_+) \longrightarrow \mathbb{R}$

- durch $e_i = (e_i(1), ..., e_i(l))$ ist schließlich der Vektor der (unsicheren) Besitztümer des Akteurs i in t_2 gegeben, wobei $e_i(j)$ den Besitz des Akteurs i im Zustand j widergibt

Die Tauschwirtschaft wird dann charakterisiert durch

$$((\mathbb{R}^l_+)^k, u_i,\ e_i,\ i = 1, ..., m)$$

Sei nun $p^l(j)$ der Preis des Gutes l wenn Zustand j auftritt. Den Vektor $p = (p(1), ..., p(k)) \in (R^l_+)^k$ bezeichnen wir als Menge von Kontingentpreisen.

Ist nun ein p vorgegeben, so legen die Akteure ihre Budgetmenge fest, bestehend aus der Menge an Konsumplänen, die sie sich durch die Menge ihres Besitzes "leisten" können:

$$B_i(p) = \left\{ c_i \in (\mathbb{R}^l_+)^k \mid p * c_i \ \ \le \ p * e_i \right\} \tag{1.1}$$

mit $p * c_i = \sum_{j=1}^{k} p(j)c_i(j)$

Definition 1.1. *Ein Arrow-Debreau-Gleichgewicht ist eine Menge von Preisen $p^* \in (\mathbb{R}^l_{++})^k$ und eine Menge von Konsumplänen, so dass gilt:*

1. *c_i^* maximiert $u_i(c_i)$ unter Einhaltung der Buddgetrestriktion, d.h. $c_i \in B_i(p^*)$ f.a. $i = 1, ..., m$*

2. *Es kommt zur Markträumung, d.h $\sum_{i=1}^{m} c_i^* \ + \ \sum_{i=1}^{m} e_i = 0$*

Anmerkung 1.2. *Wie im vorherigen Vortrag gezeigt, ex. unter den Bedingungen, dass die Nutzenfunktionen strikt konkav, stetig und monoton steigend sind **(U1)** ein solches Gleichgewicht.*

Problem: In dem vorliegenden Modell werden insgesamt $k * l$ offene Märkte benötigt, aber: die Voraussetzung eines ohne Einschränkungen vorhandenen Futurehandels ist in kaum einem Fall in der realen Wirtschaft haltbar. Ohne diese Annahme lässt sich aber der Markt in der obigen Form nicht organisieren.

Idee: Man führt einen Finanzmarkt in Form von d sog. Sicherheiten ein, um den Markt letztlich mit $l + d$ offenen Märkten organisieren zu können. Dabei garantiert der Erwerb einer Sicherheit dem Akteur in der Zukunft eine Auszahlung an einem Gut in Form einer Geldauszahlung (nominal) oder in Form der Güter selbst (real).

2 Arrow-Radner Gleichgewichts-Tausch-Wirtschaft mit Finanzmarkt in zwei Zeitpunkten

- zwei Zeitpunkte t_1, t_2
- wieder k mögliche Zustände in t_2, l Güter, m Akteure
- $e_i(j)$ beschreibt den (unsicheren) Besitz von Akteur i in Zustand j
- *keine* Verträge über zukünftige Lieferungen möglich
- dafür Möglichkeit des Erwerbs von d Sicherheiten in t_1
- die Akteure können wieder Konsumpläne in Abhängikeit ihres Besitzes erstellen
- die Akteure haben "rationale Erwartungen", d.h., sie erwarten für t_2 nur Preise, die auch tatsächlich auftreten können

2.1 Beschreibung des Finanzmarktes

Auf dem Finanzmarkt können d Sicherheiten gehandelt werden. Dabei ist jede Sicherheit durch die Auszahlung (die Dividende) an Gütern charakterisiert, den sie in jedem Zustand erzielt. So lässt sich die folgende Dividendenmatrix aufstellen:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1d} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kd} \end{pmatrix}$$

, wobei v_{ij} die Auszahlung der j-ten Sicherheit im i-ten Zustand beschreibt. Wir gehen zunächst davon aus, dass die Auszahlung jeweils nominal gegeben ist. Die Akteure können nun Portfolios zusammenstellen, wobei ein Portfolio Θ aufgefasst werden kann als ein Vektor in $\mathbb{R}^d$. Dabei sind auch negative Einträge, sprich *short selling*, erlaubt und die Auszahlung im j-ten Zustand ist dann gegeben durch $(V\Theta)_j$ (soll heißen, die j-te Zeile von V wird mit Θ multipliziert). Der Handel mit Sicherheiten findet ausschließlich in t_1 statt mit dem Preis $S \in \mathbb{R}^d_+$. Dabei nehmen wir an, dass sich die Akteure nicht verschulden können, d.h $S\Theta_i \leq 0$ für alle $i \in 1, ...m$, wobei (Θ_i) für das Portfolio des i-ten Akteurs steht.

2.2 Defintion von Gleichgewichtspreisen im Arrow-Radner-Modell

Die Akteure entwerfen wieder Konsumpläne $c = (c(1), ..., c(k)) \in (\mathbb{R}^l_+)^k$ für t_2 gegeben den Vektor der erwarteten Preise $p = (p(1), ..., p(k)) \in (\mathbb{R}^l_+)^k$.

Definition 2.1. *Das Paar (c_i, Θ_i) bezeichnen wir im Folgenden als erfüllbar, wenn gilt*

$$\begin{cases} S * \Theta_i \leq 0 \\ p(j) * c(j) \leq (V\Theta_i) + p(j) * e(j) \text{ für alle } j = 1, ..., k \end{cases} \tag{2.2}$$

Ein Paar dieser Art ist also erfüllbar, wenn der Akteur seinen Konsum durch seinen Besitz und den Ertrag seines Portfolios in t_2 finanzieren kann und er sich auf dem Finanzmarkt nicht verschuldet. Wir können auf diese Weise die Budgetrestriktion also definieren durch:

$$B_i(p, S) = \left\{ c_i \in \mathbb{R}_+^{lk} \mid \exists\, \Theta_i \in \mathbb{R}^d,\ (c_i, \Theta_i) \text{ ist erfüllbar} \right\} \tag{2.3}$$

Es wird wieder angenommen, dass die Akteure Präferenzen auf der Menge der Konsumpläne haben, darstellbar durch Nutzenfunktionen $u_i : \mathbb{R}_+^{lk} \to \mathbb{R}$, die wieder die Bedingungen *U1* erfüllen.

Definition 2.2. *Ein Radner-Gleichgewicht besteht aus*

- *einem Preisvektor für die Sicherheiten $\overline{S} \in \mathbb{R}_+^d$*
- *einem Vektor für die erwarteten Güterpreise $\overline{p} \in \mathbb{R}_+^{lk}$*
- *Konsumplänen $(\overline{c}_1, ..., \overline{c}_m)$ und Portfolios $(\overline{\Theta}_1, ..., \overline{\Theta}_m)$, so dass gilt:*
  1. – *$(\overline{c}_i)$ maximiert die jewilige Nutzenfunktion $u_i(c_i)$ unter Einhaltung der Budgetrestriktion, d.h*
     $$c_i \in B_i(\overline{p}, \overline{S}) \text{ für alle } i \in 1, ..., m$$
     – *das Paar $(\overline{c_i}, \overline{\Theta}_i)$ ist erfüllbar.*
  2. *Finanz- und Gütermarkt sind geräumt, d.h.*
     – $\sum_i^m \overline{c}_i = \sum_i^m e_i$
     – $\sum_i^m \overline{\Theta}_i = 0$

Anmerkung 2.3. *Wird V als injektiv gesetzt, so folgt die Gleichung $\sum_i^m \overline{\Theta}_i = 0$ bereits aus den drei anderen Eigenchaften des Radner-Gleichgewichts.*

Beweis. Wird vorausgesetzt, dass die Nutzenfunktion monoton wachsend ist, so kann man davon ausgehen, dass das vorhandene Budget im Optimum "ausgereizt" wird, da sonst Nutzen verschenkt würde. Es gilt dann $\overline{p}(j)(\overline{c}_i(j) - e_i(j)) = (V\overline{\Theta}_i)_j$. Summiert man nun über i, so folgt mit der Markträumung auf dem Gütermarkt $V(\sum_i^m \overline{\Theta}_i) = 0$. Da V als injektiv vorausgestzt, gilt dann $\sum_i^m \overline{\Theta}_i = 0$ □

2.3 Einschub: No Arbitrage Opportunity Assumption (NAO)

Ohne die Annahme von No-Arbitrage würde der oben definierte Begriff des Radner-Gleichgewichts keinen Sinn ergeben. Denn angenommen, es existiert eine Arbitrage, so würde diese einem Akteur ein theoretisch unbegrenztes Vermögen in t_2 sichern. Die Budgetrestriktion würe dann überflüssig, und aufgrund des unterstellten monotonen Wachstums der Nutzenfunktionen bestünde das "optimale" Verhalten eines (und damit jeden) Akteurs darin, unabhängig von den erwarteten Preisen möglichst unendlich viel von jedem Gut zu konsumieren. Dies würde dem Begriff eines sinnvollen Gleichgewichts widersprechen. Die NAO soll nun im Folgenden charakterisiert werden.

Definition 2.4. *Sei unser Finanzmarkt wie oben definiert,* $\Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_d)$ *ein Portfolio mit* $S * \Theta$ *als Anfangspreis und* $(V * \Theta)$ *als Endwert.* Θ *ist eine Arbitrage, wenn entweder* $S * \Theta < 0$ *und* $V\Theta > 0$ *oder* $S * \Theta = 0$ *und* $V\Theta \geq 0$ *gilt.*

Im Folgenden wird von fehlenden Arbitragemöglichkeiten (NAO) gesprochen, wenn für alle $\Theta \in \mathbb{R}^d$ *gilt:*

- *Aus* $V\Theta \; = \; 0$ *folgt* $S * \Theta \; = \; 0$
- *Aus* $V\Theta \; \geq \; 0$ *folgt* $S * \Theta \; > \; 0$

Theorem 1. *Die NAO-Annahme ist äquivalent zur Existenz eines* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{R}^k_{++}$ *, so dass gilt:*

$$S_i \; = \; \sum_{j=1}^{k} v_{i,j}\beta_j \;\; \forall i \in 1, ..., d \; bzw. \; S \; = \; V^T\beta \tag{2.4}$$

Um dieses Theorem zu beweisen, benötigen wir den *Minkowskischen Trennungssatz* in der folgenden Version:

Theorem 2. *(Minkowskischer Trennungssatz) Seien* C_1, C_2 *zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Mengen im* $\mathbb{R}^k$*, wobei* C_1 *abgeschlossen und* C_2 *kompakt ist. Dann existiert ein* $a \in \mathbb{R}^k$ *und zwei verschiedene reelle Zahlen* b_1, b_2*, so dass gilt:*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \, x_j \; \leq \; b_1 \; < \; b_2 \; \leq \; \sum_{j=1}^{k} a_j \, y_j \;\; ; x \in C_1, y \in C_2 \tag{2.5}$$

Bew. zu Theorem 1. Sei $S^T = (S_1, ..., S_d)$ der Spaltenvektor der Anfangspreise und sei U folgender Unterraum des $\mathbb{R}^{k+1}$

$$U \; := \; \left\{ z \in \mathbb{R}^{k+1} \mid z = \begin{pmatrix} -S^T \\ V \end{pmatrix} x \; ; \; x \in \mathbb{R}^{d+1} \right\} \tag{2.6}$$

Fasst man x als bel. Portfolio aus, so bestimmt U also die Menge der erzielbaren Gewinne.. Nimmt man nun an, dass die NAO gelten, so folgt $U \cap \mathbb{R}_+^{k+1} = \{\emptyset\}$ (siehe Fima I). Weiter sei

$$\Delta^k := \left\{ z \in \mathbb{R}_+^{k+1} | \sum_{j=0}^{k} z_j = 1 \right\} \tag{2.7}$$

Insbesondere gilt $U \cap \Delta^k = \emptyset$. Beide Mengen sind konvex, U abgeschlossen und Δ kompakt. Mit dem Minkowskischen Trennungssatz folgt somit die Existenz einer Folge (β_j ; $j \in 0, ..., k$) und zweier reelle Zahlen b_1,b_2, so dass gilt:

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j z_j \leq b_1 < b_2 \leq \sum_{j=0}^{k} \beta_j w_j \; ; \; \forall \, z \in U, w \in \Delta$$

Da $0 \in U$, folgt $b_1 \geq 0$ und daraus, wenn man den Vektor w betrachtet, dessen Komponenten alle 0 sind mit Ausnahme von $w_j = 1$ folgt, dass $\beta_j > 0 \forall j \in 0, ..., k$. Wähle o.B.d.A $\beta_0 = 1$. Es sei dann $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)$. Die Ungleichung $z_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j v_j \leq 0$ kann dann geschrieben werden als $(-S + V^T\beta) * x \leq 0$. Mit den NAO und da x frei wählbar, folgt somit $S = V^T\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}_{++}^k$ wie behauptet.

Die Gegenrichtung des Beweises ist trivial. □

Man bezeichnet β auch als Zustandspreisvektor.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der Zustandspreise

Wird die Existenz einer risikofreien Sicherheit angenommen (hier sei es o.B.d.A. die Erste), so gilt:

$$v_j^1 = 1 + r \;\; \forall \, j \in 1, ..., k \;\; , r > -1 \text{ sowie Anfangpreis } 1 \tag{2.8}$$

und wegen

$$S_i = \sum_{1}^{k} v_{i,j} * \beta_j \tag{2.9}$$

gilt für $i = 1$

$$1 = \sum_{j=1}^{k} \beta_j * (1 + r) \tag{2.10}$$

Da $(1+r)\beta_j$ positive Zahlen für alle $j = 1, ..., d$ sind und sich zu 1 aufsummieren, können sie als Wahrscheinlichkeiten der unterschiedlichen *states of the world* interpretiert werden.

3 Der Fall des vollständigen Marktes

Im Folgenden soll von einem vollständigen Markt ausgegangen werden, d.h. die zur Matrix V gehörende lin. Abb. wird als surjektiv vorausgesetzt (insbes. $k \leq d)$) und $rg(V) = k$. Ziel dieses Abschnittes ist es, unter Voraussetzung der Vollständigkeit und der Annahme der NAO einen Zusammenhang zwischen Radner- und Arrow-Debreau-Gleichgewicht herzustellen.

Durch Multiplizieren des zweiten Teils unserer Budgetrestriktion (2.2) mit β_j und summieren über alle j erhält man mit $\overline{S} = V^T \beta$:

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j \overline{p} \left[c_i(j) - e(j) \right] \leq 0. \tag{3.11}$$

Mit $p^*(j) = \beta_j \overline{p}(j)$ folgt dann

$$\sum_{j=1}^{k} p^* [c_i(j) - e(j)] \leq 0. \tag{3.12}$$

Definiert man nun $\overline{B}_i(p^*) := \left\{ c \in \mathbb{R}_+^{lk} | \, p^* * c \leq p^* e_i \right\}$, so wurde gezeigt, dass $B_i(\overline{p}, \overline{S}) \subseteq \overline{B}_i(p^*)$ gilt.

Beh. 1. *Es gilt sogar* $B_i(\overline{p}, \overline{S}) = \overline{B}_i(p^*)$, *wenn* $\overline{S} = V^T \beta$, $\beta \in \mathbb{R}_{++}^k$ *sowie* $\overline{p} = \frac{p^*(j)}{\beta_j}$

Beweis. Sei $c_i \in \overline{B}_i(p^*)$. Da V surjektiv, existiert Θ_i, so dass gilt:

$$(V\Theta_i)_j = \frac{p^*(j)}{\beta_j} * [c_i(j) - e_i(j)] = \overline{p}(j) * [c_i(j) - e_i(j)] \ \forall j \tag{3.13}$$

Mit 3.11 folgt:

$$\overline{S} * \Theta_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j (V\Theta_i)_j \leq 0 \tag{3.14}$$

Es folgt dann mit (3.13) und (3.14) $c_i \in B_i(\overline{p}, \overline{S})$. □

Im Folgenden wird unter Anderem hieraus folgendes Theorem gefolgert:

Theorem 3 (Äquivalenztheorem)**.** *Wenn* $(\overline{p}, \overline{S}, \overline{c_i}, \overline{\Theta_i})_{i=1,...,m}$ *ein Radner Gleichgewicht ist, so ex. ein* $\beta \in \mathbb{R}_{++}^k$, *so dass gilt* $\overline{S} = V^T \beta$ *und so dass gilt:* $(p^*, \overline{c_i})_{i=1,...,m}$ *ist ein Arrow-Debreau Gleichgewicht mit* $p^*(j) = \overline{p}(j)\beta_j$.

Andererseits, wenn $(p^*, \overline{c_i})_{i=1,...,m}$ *ein Arrow-Debreau-Gleichgewicht ist, so ex. für jedes* $\beta \in \mathbb{R}_{++}^k$ *ein* $\overline{\Theta}_i, i = 1, ..., m,$*, so dass gilt:* $(\overline{p}, V^T\beta, \overline{c_i}, \overline{\Theta}_i)_{i=1,...,m}$ *ist ein Radner-Gleichgewicht mit* $\overline{p} = \frac{p^*(j)}{\beta(j)}$.

Beweis. Die erste Implikation folgt aus der Gleichheit von $B_i(\overline{p}, \overline{S})$ und $\overline{B}_i(p^*)$. Für die Gegenrichtung müssen wir nun für alle i ein passendes Portfolio konstruieren, so dass die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist. Hierzu nehmen wir an, dass die ersten k Spalten von V lin. unabhängig sind (möglich, da $rg(V) = k$). Schreibe $V = (V^1, V^2)$. wobei V^1 aus den ersten k Spalten der Matrix besteht, und schreibe $\Theta_i = (\Theta_i^1, \Theta_i^2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$. V^1 ist dann bijektiv. Es kann dann $(\overline{\Theta}_i^1)_{i=1,\ldots,m}$ def. werden durch

$$(V^1\overline{\Theta}_i^1) = \overline{p}(j)[\overline{c}_i(j) - e_i(j)] \text{ und } \overline{\Theta}_i^2 = 0 \tag{3.15}$$

Nach (2.3) folgt dann wegen der Injektivität von V^1 aus $\sum_{i=1}^{m} \overline{c_i} = \sum_{i=1}^{m} e_i(j)$ bereits $\sum_{i=1}^{m} \overline{\Theta}_i^1(j) = 0$. Da nach Def. auch $\sum_{i=1}^{m} \overline{\Theta}_i^2(j) = 0$, folgt, dass die Gleichgewichtsbedingung für ein Radner-Gleichgewicht auf dem Finanzmarkt erfüllt ist. □

Dieses Theorem liefert uns somit unter den Annahmen eines vollständigen Finanzmarktes sowie der NAO eine Existenzaussage von Radner-Gleichgewichten. Unter den üblichen Annahmen *U1* nämlich wissen wir bereits, dass ein Arrow-Debreau Gleichgewicht existiert. Also können wir folgendes Korollar notieren:

Korollar 1. *Unter der Annahme von U1 und $rg(V) = k$ existiert für alle $\beta \in \mathbb{R}^k_{++}$ ein Gleichgewicht auf den Finanzmärkten mit $S = V^T\beta$.*

Es folgt dann die Existenz eines Radner-Gleichgewichts.

Anmerkung: Es bleibt festzuhalten, dass die Erweiterung des ersten Modells durch einen Finanzmarkt zum Radner-Modell nicht zu einer Veränderung des Konsumverhaltens der Akteure im Gleichgewicht führt. Wohl aber ist das eigentliche Ziel der Verringerung der erforderlichen offenen Märkte zur Organisation dieser Wirtschaft gelungen. So gilt besonders für eine große Anzahl von möglichen "'*states of the world*"': $l + d < kl$. Noch deutlicher wird dieser Unterschied bei einem Übergang zu einem Mehrperiodenmodell. Dann nämlich steigt die Anzahl an erforderlichen offenen Märkten im ersten Modell exponentiell ($(kl)^n$ Märkte für n Perioden) und in letzterem Modell nur linear ($(n*(l+d)$ Märkte für n Perioden).

4 Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Ziel dieses Abschnittes ist es, das CAPM einzuführen. Dabei handelt es sich um eine Modifikation des eingeführten Radner-Modells mit zwei Zeitpunkten. Diesmal ist allerdings eine unendliche Menge an möglichen Zuständen zum Zeitpunkt t_2 erlaubt.

Es wird eine Handelswirtschaft mit einem einzelnen Konsumgut betrachtet und dieses wird als Numeraire genommen (d.h., die Auszahlung der Sicherheiten auf dem Finanzmarkt wird in Einheiten dieses Gutes ausgegeben). Weiter haben wir m Akteure. Zum Zeitpunkt t_1 wird auf einem Finanzmarkt mit d Sicherheiten gehandelt. Dabei wird die Auszahlung des j-ten Finanzgutes in t_2 durch die Zufallsvariable d^j wiedergegegeben, wobei d^j auf einem Wáhrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert ist und wir eine endliche Varianz unterstellen. O.B.d.A können wir davon ausgehen, dass die Auszahlung der Finanzgüter linear unabhängig ist. Ist dies nicht der Fall, so könnte man linear abhängige Payoffs einfach zu einem zusammenfassen, ohne etwas an Information für den Finanzmarkt zu verlieren.

Akteur i hat zum Zeitpunkt t_2 wieder einen zustandsabhängigen Besitz, gegeben durch die Zufallsvariable e_i definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. In t_1 kann er sein Vermögen in t_2 wieder durch Erstellen eines Portfolios $\Theta_i = (\Theta_i^1, ..., \Theta_i^d)$ beeinflussen, wieder unter der Einschränkung, dass er sich nicht verschuldet. Zum Zeitpunkt t_2 stehen ihm dann die Ressourcen $c_i = e_i + \sum\limits_{i=1}^{d} \Theta_i^j d^j$ zur Verfügung.

Sei nun weiter mit C der durch die $(d^j,\ j \in 1, ..., d)$ erzeugte endlichdimensionale Vektorraum gekennzeichnet. C wird mit dem Skalarprodukt $\langle c, \acute{c} \rangle = E(c\acute{c})$ versehen. Die zugehörige Norm sei gegeben durch die 2-Norm $\|c\|_2$. Wir nehmen an, dass:

- $e_i \in C$ für alle i
- Der aggregierte Wohlstand $e = \sum\limits_{i=1}^{m} e_i$ ist nicht deterministisch
- $d^1 = 1$, d.h. es ex. eine risikofreie Anlage

Im Folgenden werden die Bedingungen ***U1*** ersetzt durch folgende Annahmen:

U2: Die Akteure bewerten die Elemente von C durch Nutzenfunktionen $U_i : C \to \mathbb{R}$, $(i = 1, ..., m)$, welche sich aversiv bezüglich der Varianz (d.h. bzgl. des Risikos) verhalten. Dies bedeutet, dass für jedes Paar $(c, \acute{c}) \in C^2$ mit $E(c_i) = E(\acute{c_i})$, aus der Ungleichung $Var(c_i) < Var(\acute{c_i})$ immer $U_i(c_i) > U_i(\acute{c_i})$ folgt.

Insgesamt präferieren die Akteure dabei die Elemente aus C, die ihnen zunächst den größten Erwartungswert generieren und wählen dann bei Gleichheit aus diesen das Element mit der geringsten Varianz aus.

Definition 4.1. $(\overline{S}, \overline{\Theta}_i)_{i=1,\dots,m)}$ *ist ein Gleichgewicht, wenn gilt:*

1. *Θ_i maximiert $U_i(e_i + \sum\limits_{j=1}^{d} \Theta_i^j d^j)$ unter der Bed. $\overline{S} * \Theta_i \leq 0$*
2. *Es herrscht Markträumung auf dem Finanzmarkt, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\Theta}_i = 0$*

Es gibt eine Anzahl von Beweisen über die Existenz von solchen Gleichgewichten unter unterschiedlichen Annahmen. So ist die Existenz bspw. bewiesen unter den Annahmen, dass eine risikofreie Anlage existiert und die Nutzenfunktionen der Akteure konkave Funktionen des Erwartungswertes und der Varianz der ZV sind und sich bzgl. des Erwartungswertes wachsend und bzgl. der Varianz fallend Verhalten. Lässt man hingegen die Annahme der Existenz einer risikofreien Anlage weg, so kann es vorkommen, dass kein Gleichgewicht existiert.