Seminararbeit

Bewertung von exotischen Optionen im CRR-Modell

Stefanie Tiemann

08. 06. 2010

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In dieser Arbeit geht es um die Bewertung ausgewählter exotischer Optionen mithilfe der Markov-Eigenschaft. Dazu werden zunächst einige wichtige Begriffe und Lemmata erläutert, die für die Bewertung der Optionen benötigt werden. Anschließend werden asiatische Optionen, Lookback Optionen und zweiseitige knock-out Barriere Optionen bewertet.

Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Das CRR-Modell ist ein Finanzmarktmodell mit zwei Finanzgütern:

- risikofreie Anlage mit Preisprozess $(1+\rho)^n$, $n = 0, \ldots, N$, wobei $\rho > 0$ deterministische Zinsrate pro Periode ist

- risikobehaftetes Finanzgut mit Preisprozess
  $A_n = A_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} Y_i, (Y_i)_{i=1,\ldots,N}$ iid,
  $P(Y_i = u) = p = 1 - P(Y_i = d), 0 < d < u, A_0 > 0$

- Informationsverlauf $\mathcal{F}_n = \sigma(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \sigma(A_0, Y_1, \ldots, Y_n)$

Markov-Eigenschaft

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum. Ein zu einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptierter
Prozess $(X_{1,n}, \ldots, X_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}^m)$ erfüllt die Markov-Eigenschaft, falls
(a) $P(X_{1,k+1} \in A_1, \ldots, X_{m,k+1} \in A_m | \mathcal{F}_k) = P(X_{1,k+1} \in A_1, \ldots, X_{m,k+1} \in A_m | (X_{1,k}, \ldots, X_{m,k}))$
P-f.s. für alle $k \in \mathbb{N}, A_i \in \mathfrak{B}$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.
Äquivalente Formulierung:
(b) Für jede messbare Funktion $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, für die $E|h(X_{1,k+1}, \ldots, X_{m,k+1})|$ existiert, gilt:
$E[h(X_{1,k+1}, \ldots, X_{m,k+1}) | \mathcal{F}_k] = E[h(X_{1,k+1}, \ldots, X_{m,k+1}) | (X_{1,k}, \ldots, X_{m,k})]$
Beweis für $(b) \Rightarrow (a)$:
Gelte (b).

Wähle $h = \mathbb{1}_{\{A_1 \times \ldots \times A_m\}}$. Dann ist h messbar und $E|h(X_{1,k+1}, \ldots, X_{m,k+1})|$ existiert.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&P(X_{1,k+1} \in A_1, \ldots, X_{m,k+1} \in A_m | \mathcal{F}_k) \\
&= E[\mathbb{1}_{\{A_1 \times \ldots \times A_m\}}(X_{1,k+1}, \ldots, X_{m,k+1}) | \mathcal{F}_k] \\
&\overset{\text{(b)}}{=} E[\mathbb{1}_{\{A_1 \times \ldots \times A_m\}}(X_{1,k+1}, \ldots, X_{m,k+1}) | (X_{1,k}, \ldots, X_{m,k})] \\
&= P(X_{1,k+1} \in A_1, \ldots, X_{m,k+1} \in A_m | (X_{1,k}, \ldots, X_{m,k}))
\end{aligned}
$$

□

Lemma 0

Seien $(M_1, \mathfrak{M}_1)$, $(M_2, \mathfrak{M}_2)$ messbare Räume, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$, $X_1 : \Omega \to M_1$, $X_2 : \Omega \to M_2$ und $f : (M_1 \times M_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ messbare Abbildungen . Gelte ferner:

(i) X_1 ist unabhängig von $\mathcal{G}$

(ii) X_2 ist messbar bzgl. $\mathcal{G}$

(iii) $Ef(X_1, X_2)$ ex.

Dann gilt: $E[f(X_1, X_2)|\mathcal{G}] = E[f(X_1, X_2)|X_2]$ P-f.s
Beweis: in der Vorlesung

Exotische Optionen

Exotische Optionen sind derivate Finanzgüter, deren Auszahlungen zusätzlich zur Call- oder Put-Bedingung von weiteren Bedingungen abhängen.
Es handelt sich um Finanzverträge, die i.d.R. individuellen Kundenbedürfnissen entsprechen. Deshalb werden sie außerbörslich gehandelt.

Im folgenden betrachten wir verschiedene pfadabhängige Optionen europäischen Typs, d.h. Optionen, deren Auszahlungen von der Kursentwicklung beeinflusst werden und deren Ausübung nur am Ende der Laufzeit möglich ist.

1 Asiatische Optionen

Die Auszahlung einer asiatischen Option ist vom Mittelwert der Kurse des Underlyings zu festgelegten Zeitpunkten abhängig.
In der Praxis wird i.d.R. der arithmetische Mittelwert verwendet, d.h. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k$, wobei A_k der Kurs des Underlyings zum Zeitpunkt k ist und $1, \ldots, n$ die Zeitpunkte, zu denen der Kurs des Underlyings in die Mittelwertberechnung eingeht.
Man unterscheidet asiatische Optionen nach:

- fester oder variabler Basis, d.h. fixed strike (Basis ist bei Vertragsbeginn festgelegte Konstante K) oder floating strike (Basis entspricht Mittelwert der Underlyingkurse)
- Call oder Put, d.h. bei fester Basis Absicherung des Mittelwerts der Underlyingkurse oberhalb bzw. unterhalb von K und bei variabler Basis Absicherung des Schlusskurses oberhalb bzw. unterhalb des Mittelwerts der Underlyingkurse

d.h. Auszahlung in N ist bei

- fixed strike Asian Call $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k - K)^+$
- fixed strike Asian Put $(K - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k)^+$
- floating strike Asian Call $(A_N - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k)^+$
- floating strike Asian Put $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k - A_N)^+$

Beispiel

Ein deutsches Unternehmen erhält im nächsten Jahr jeden Monat 1 Mio US-$ und tauscht diese in Euro. Da der Gewinn des Unternehmens somit vom US-$ - € -Wechselkurs (Wert von einem US-$ in €) abhängt, sichert das Unternehmen den durchschnittlichen Wechselkurs durch einen fixed strike Asian Put auf den US-$ - € - Wechselkurs mit:

- Laufzeit N = 12 Monate

- strike K (z.B. Wechselkurs in n = 0)

- n = $1, \ldots, 12$ die Zeitpunkte, zu denen der Wechselkurs in die Mittelwertberechnung eingeht (Zeitpunkte, zu denen Geld getauscht wird)

Dies führt zur Auszahlung $(K - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12} A_k)^+$ in N, wobei A_k der Wechselkurs in k ist. D.h. ist der durchschnittliche Wechselkurs kleiner K, erhält das Unternehmen eine Auszahlung in Höhe von $(K - \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12} A_k)$, ist der durchschnittliche Wechselkurs größer oder gleich K, partizipiert das Unternehmen daran und die Option hat Auszahlung 0.

Im folgenden wollen wir asiatische Optionen europäischen Typs mit arithmetischer Mittelwertbildung im CRR-Modell bewerten, wobei der Mittelwert aller Kurse des Underlyings während der Laufzeit gebildet wird. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1

Sei $S_k := \sum_{n=0}^{k} A_n$ die laufende Summe des Underlyingkurses. Dann erfüllt der zweidimensionale Prozess $\{(A_k, S_k)\}_{k=0,\ldots,N}$ die Markov-Eigenschaft.
Beweis:
Sei $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ beliebig.
Sei $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, für die $E|h(A_{k+1}, S_{k+1})|$ existiert.
Es gilt: $h(A_{k+1}, S_{k+1}) = h(A_{k+1}, S_k + A_{k+1}) = h(A_k \cdot Y_{k+1}, S_k + (A_k \cdot Y_{k+1}))$

Um Lemma 0 anwenden zu können, überprüfen wir die Voraussetzungen:

- $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B})$ sind messbare Räume, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}_k$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.

- $Y_{k+1} : \Omega \to \mathbb{R}$, $(A_k, S_k) : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind messbare Abbildungen.

- $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(Y_{k+1}, (A_k, S_k)) := h(A_k \cdot Y_{k+1}, S_k + (A_k \cdot Y_{k+1}))$
$= h(A_{k+1}, S_{k+1})$ ist messbar.

- Y_{k+1} ist unabhängig von $\mathcal{F}_k$.

- (A_k, S_k) ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_k$.

- $Ef(Y_{k+1}, (A_k, S_k)) = Eh(A_{k+1}, S_{k+1})$ existiert.

Somit sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, es gilt also:

$$\begin{aligned} E[h(A_{k+1}, S_{k+1})|\mathcal{F}_k] &= E[f(Y_{k+1}, (A_k, S_k))|\mathcal{F}_k] \\ &\overset{\text{Lemma0}}{=} E[f(Y_{k+1}, (A_k, S_k))|(A_k, S_k)] \\ &= E[h(A_{k+1}, S_{k+1})|(A_k, S_k)] \end{aligned}$$

Der zweidimensionale Prozess $\{(A_k, S_k)\}_{k=0,\ldots,N}$ erfüllt somit die Markov-Eigenschaft (Formulierung (b)). $\square$

Sei V_k der Wert der Option in k und $v_k(x, y)$ der Wert der Option in k, wenn $A_k = x$, $S_k = y$ gilt. $V_N = v_N(A_N, S_N)$ entspricht der Auszahlung der Option in N.
Sei P^* äquivalentes Martingalmaß mit $P^*(Y_i = u) = p^* = 1 - P^*(Y_i = d)$. Dann ist $((1+\rho)^{-k}V_k)_{k=0,\ldots,N}$ ein P^*-Martingal.
Somit gilt:

$$\begin{aligned} &(1+\rho)^{-k}V_k = E^*[(1+\rho)^{-(k+1)}V_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &\qquad \Leftrightarrow V_k = (1+\rho)^{-1}E^*[V_{k+1}|\mathcal{F}_k] \quad \text{für k} = 0, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Damit können wir V_{N-1} berechnen:

$$\begin{aligned} V_{N-1} &= (1+\rho)^{-1}E^*[V_N|\mathcal{F}_{N-1}] \\ &= (1+\rho)^{-1}E^*[v_N(A_N, S_N)|\mathcal{F}_{N-1}] \\ &\overset{\text{Lemma1}}{=} (1+\rho)^{-1}E^*[v_N(A_N, S_N)|(A_{N-1}, S_{N-1})] \\ &= (1+\rho)^{-1}(p^*v_N(uA_{N-1}, S_{N-1} + uA_{N-1}) + (1-p^*)v_N(dA_{N-1}, S_{N-1} + dA_{N-1})) \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$v_{N-1}(A_{N-1}, S_{N-1}) := \frac{1}{1+\rho}(p^*v_N(uA_{N-1}, S_{N-1}+uA_{N-1})+(1-p^*)v_N(dA_{N-1}, S_{N-1}+dA_{N-1}))$$

damit $V_{N-1} = v_{N-1}(A_{N-1}, S_{N-1})$ gilt.

Mit dem Algorithmus

$$v_k(A_k, S_k) := \frac{1}{1+\rho}(p^* v_{k+1}(uA_k, S_k+uA_k)+(1-p^*)v_{k+1}(dA_k, S_k+dA_k)) \text{ für } k = N-1, \ldots, 0$$

können wir rückwärts den Anfangswert $V_0 = v_0(A_0, S_0)$ der Option berechnen.

2 Lookback Optionen

Die Auszahlung einer Lookback Option ist von dem für den Käufer der Option besten Wert des Underlyings während der Laufzeit der Option abhängig.
Man unterscheidet Lookback Optionen nach:

- fester oder variabler Basis
- Call oder Put

d.h. Auszahlung in N ist bei

- fixed strike lookback Call $(max_{k\in\{0,\ldots,N\}}A_k - K)^+$
- fixed strike lookback Put $(K - min_{k\in\{0,\ldots,N\}}A_k)^+$
- floating strike lookback Call $(A_N - min_{k\in\{0,\ldots,N\}}A_k)^+$
- floating strike lookback Put $(max_{k\in\{0,\ldots,N\}}A_k - A_N)^+$

Für die Bewertung von Lookback Optionen europäischen Typs benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 2

Sei $M_k := \max_{n\in\{0,\ldots,k\}} A_n$ das laufende Maximum des Underlyingkurses und
$m_k := \min_{n\in\{0,\ldots,k\}} A_n$ das laufende Minimum des Underlyingkurses.
Dann erfüllen die zweidimensionalen Prozesse $\{(A_k, M_k)\}_{k=0,\ldots,N}$, $\{(A_k, m_k)\}_{k=0,\ldots,N}$ die Markov-Eigenschaft.
Beweis:
analog zum Beweis von Lemma 1

Sei V_k der Wert der Option in k und $v_k(x, y)$ der Wert der Option in k, wenn $A_k = x$, $M_k = y$ bzw. $A_k = x$, $m_k = y$ gilt. Wie bei asiatischen Optionen entspricht der Wert einer Lookback Option in N der Auszahlung der Option in N.

Mit den gleichen Überlegungen wie bei asiatischen Optionen erhält man Algorithmen für Lookback Optionen, deren Auszahlung vom Maximum bzw. vom Minimum des Underlyingkurses während der Laufzeit abhängt:

- Mit dem Algorithmus

$$
\begin{aligned}
v_k(A_k, M_k) :=& \frac{1}{1+\rho}(p^* v_{k+1}(uA_k, M_k \vee uA_k) + (1-p^*) v_{k+1}(dA_k, M_k \vee dA_k)) \\
=& \frac{1}{1+\rho}(p^* v_{k+1}(uA_k, M_k \vee uA_k) + (1-p^*) v_{k+1}(dA_k, M_k)) \text{ für } k = N-1, \ldots, 0
\end{aligned}
$$

  können wir rückwärts den Anfangswert $V_0 = v_0(A_0, M_0)$ von fixed strike lookback Call bzw. floating strike lookback Put berechnen.

- Mit dem Algorithmus

$$
\begin{aligned}
v_k(A_k, m_k) :=& \frac{1}{1+\rho}(p^* v_{k+1}(uA_k, m_k \wedge uA_k) + (1-p^*) v_{k+1}(dA_k, m_k \wedge dA_k)) \\
=& \frac{1}{1+\rho}(p^* v_{k+1}(uA_k, m_k) + (1-p^*) v_{k+1}(dA_k, m_k \wedge dA_k)) \text{ für } k = N-1, \ldots, 0
\end{aligned}
$$

  können wir rückwärts den Anfangswert $V_0 = v_0(A_0, m_0)$ von fixed strike lookback Put bzw. floating strike lookback Call berechnen.

3 zweiseitige knock-out Barriere Optionen

Eine zweiseitige knock-out Barriere Option verfällt, wenn der Kurs des Underlyings während der Laufzeit der Option ein durch zwei Schranken definiertes Intervall verlässt. Man unterscheidet zweiseitige knock-out Barriere Optionen nach:

- Call oder Put
- mit oder ohne Rückvergütung (= rebate, d.h. Verfall der Option führt entweder bei Berühren einer Schranke (payment at hit) oder zum Ausübungszeitpunkt (payment at expiry) zu einer konstanten Auszahlung

Seien $l < r$ Barrieren und h Auszahlungsfunktion. Dann erhält der Inhaber einer Option ohne Rückvergütung am Ende der Laufzeit die Auszahlung

$$h(A_N)\mathbb{1}_{\{l<min_{k\in\{0,\dots,N\}}A_k,\ max_{k\in\{0,\dots,N\}}A_k<r\}}$$

und der Inhaber einer Option mit Rückvergütung R die Auszahlung

$$h(A_N)\mathbb{1}_{\{l<min_{k\in\{0,\dots,N\}}A_k,\ max_{k\in\{0,\dots,N\}}A_k<r\}} + R\mathbb{1}_{\{l\geq min_{k\in\{0,\dots,N\}}A_k\ \vee\ max_{k\in\{0,\dots,N\}}A_k\geq r\}}.$$

Für die Bewertung von zweiseitigen knock-out Barriere Optionen europäischen Typs benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3

Sei $M_k := \max_{n\in\{0,\dots,k\}} A_n$ das laufende Maximum des Underlyingkurses und
$m_k := \min_{n\in\{0,\dots,k\}} A_n$ das laufende Minimum des Underlyingkurses.
Dann erfüllt der dreidimensionale Prozess $\{(A_k, M_k, m_k)\}_{k=0,\dots,N}$ die
Markov-Eigenschaft.
Beweis:
Sei $k \in \{0,\dots,N-1\}$ beliebig.

Sei $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare Funktion, für die $E|h(A_{k+1}, M_{k+1}, m_{k+1})|$ existiert.
Es gilt: $h(A_{k+1}, M_{k+1}, m_{k+1}) = h(A_{k+1}, M_k \vee A_{k+1}, m_k \wedge A_{k+1})$
$= h(A_k \cdot Y_{k+1}, M_k \vee (A_k \cdot Y_{k+1}), m_k \wedge (A_k \cdot Y_{k+1}))$

Um Lemma 0 anwenden zu können, überprüfen wir die Voraussetzungen:

- $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B})$ sind messbare Räume, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}_k$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.
- $Y_{k+1} : \Omega \to \mathbb{R}$, $(A_k, M_k, m_k) : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind messbare Abbildungen.
- $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
  $f(Y_{k+1}, (A_k, M_k, m_k)) := h(A_k \cdot Y_{k+1}, M_k \vee (A_k \cdot Y_{k+1}), m_k \wedge (A_k \cdot Y_{k+1})) = h(A_{k+1}, M_{k+1}, m_{k+1})$
  ist messbar.
- Y_{k+1} ist unabhängig von $\mathcal{F}_k$.
- (A_k, M_k, m_k) ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_k$.
- $Ef(Y_{k+1}, (A_k, M_k, m_k)) = Eh(A_{k+1}, M_{k+1}, m_{k+1})$ existiert.

Somit sind die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt, es gilt also:

$$\begin{aligned} E[h(A_{k+1}, M_{k+1}, m_{k+1})|\mathcal{F}_k] &= E[f(Y_{k+1}, (A_k, M_k, m_k))|\mathcal{F}_k] \\ &\overset{\text{Lemma0}}{=} E[f(Y_{k+1}, (A_k, M_k, m_k))|(A_k, M_k, m_k)] \\ &= E[h(A_{k+1}, M_{k+1}, m_{k+1})|(A_k, M_k, m_k)] \end{aligned}$$

Der dreidimensionale Prozess $\{(A_k, M_k, m_k)\}_{k=0,\ldots,N}$ erfüllt somit die Markov-Eigenschaft (Formulierung (b)). $\square$

Sei V_k der Wert der Option in k und $v_k(x, y, z)$ der Wert der Option in k, wenn $A_k = x, M_k = y, m_k = z$ gilt.
$V_N = v_N(A_N, M_N, m_N)$ entspricht der Auszahlung der Option in N.

$$
\begin{aligned}
V_{N-1} &\overset{(1.1)}{=} (1+\rho)^{-1}E^*[V_N|\mathcal{F}_{N-1}] \\
&= (1+\rho)^{-1}E^*[v_N(A_N, M_N, m_N)|\mathcal{F}_{N-1}] \\
&\overset{\text{Lemma3}}{=} (1+\rho)^{-1}E^*[v_N(A_N, M_N, m_N)|(A_{N-1}, M_{N-1}, m_{N-1})] \\
&= (1+\rho)^{-1}(p^*v_N(uA_{N-1}, M_{N-1} \vee uA_{N-1}, m_{N-1} \wedge uA_{N-1}) \\
&\quad + (1-p^*)v_N(dA_{N-1}, M_{N-1} \vee dA_{N-1}, m_{N-1} \wedge dA_{N-1})) \\
&= (1+\rho)^{-1}(p^*v_N(uA_{N-1}, M_{N-1} \vee uA_{N-1}, m_{N-1}) \\
&\quad + (1-p^*)v_N(dA_{N-1}, M_{N-1}, m_{N-1} \wedge dA_{N-1}))
\end{aligned}
$$

Wir definieren nun

$$
v_{N-1}(A_{N-1}, M_{N-1}, m_{N-1}) := \\
\frac{1}{1+\rho}(p^*v_N(uA_{N-1}, M_{N-1} \vee uA_{N-1}, m_{N-1}) + (1-p^*)v_N(dA_{N-1}, M_{N-1}, m_{N-1} \wedge dA_{N-1}))
$$

damit $V_{N-1} = v_{N-1}(A_{N-1}, M_{N-1}, m_{N-1})$ gilt.

Mit dem Algorithmus

$$
v_k(A_k, M_k, m_k) := \frac{1}{1+\rho}(p^*v_{k+1}(uA_k, M_k \vee uA_k, m_k) + (1-p^*)v_{k+1}(dA_k, M_k, m_k \wedge dA_k))
$$

für $k = N-1, \ldots, 0$

können wir rückwärts den Anfangswert $V_0 = v_0(A_0, M_0, m_0)$ der Option berechnen.