Bewertung von amerikanischen Optionen im CRR Modell

Seminararbeit von Nadja Amedsin

22.05.10

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die vorliegende Arbeit gibt eine Einführung in die Thematik der Amerikanischen Optionen, d.h. Termingeschäfte, die einem Vertragspartner (Optionsinhaber) das Recht gewährt, innerhalb einer bestimmten Frist, eine bestimmte Menge eines speziellen Gutes (z.B. Aktien, usw.) zu einem vorab vereinbarten Preis auszuüben. Der Käufer kann die Option zu einem beliebigen, für ihn optimalen, Zeitpunkt n stoppen. Der Verkäufer, im Gegensatz, sucht nach einer Absicherung von dem Risiko, das mit der Wahl der Stoppzeit von dem Käufer verbunden ist.
Im folgenden betrachte man ein vollständiges, arbitragefreies, diskretes N- Perioden Modell.

2 Amerikanischer Claim

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei der Informationsverlauf durch eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ mit $\mathcal{F}_o = \{\emptyset, \Omega\}$ gegeben ist. Die Auszahlungsfolge eines Amerikanischen Claims bezeichnen wir mit einem adaptierten reellwertigen stochastischen Prozess $A = (A_n)_{n=0,...,N}$. Also, A_n entspricht der Auszahlung, die der Optionsinhaber erhält, wenn er sich entscheidet die Amerikanische Option zum Zeitpunkt $n \in 0, ..., N$ auszuüben. Diese Entscheidung hängt nur von der bis zu diesem Zeitpunkt n stehender Information ab. Aus diesem Grunde betrachten wir die Strategien des Käufers zur Wahl des Ausübungszeitpunkts als Stopzeiten bzgl. $\mathcal{F}$:
$\tau : \Omega \to 0, ..., N$ mit $\{\tau = n\} \equiv \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n = 0, ..., N$
zu deren ein Amerikanischer Claim C der Form:

$$C(A, \tau) = \{A_0 \mathbb{1}_{\{\tau=0\}}, A_1 \mathbb{1}_{\{\tau=1\}}, ..., A_N \mathbb{1}_{\{\tau=N\}}\} \tag{1}$$

gehört. Folglich bekommt der Optionsinhaber bei Anwendung der Stategie $\tau \in \{0, ..., N\}$ die abdiskontierte Gesamtauszahlung

$$B_\tau A_\tau = \sum_{n=0}^{N} B_n A_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \tag{2}$$

wobei $B_\tau = 1/\beta(\tau) = 1/(1+r)^\tau$ der Diskontierungsfaktor zur Zeit τ mit Zinsrate r ist.

Man sieht, der Inhaber der Option wird versuchen, durch Wahl der Stopzeit τ den Wert von $C(A, \tau)$ zu maximieren.

2.1 Beispiele

1)Man betrachte die amerikanische Calloption auf eine Aktie. Seien $S_0, ..., S_N$ die Aktienkurse, K der Ausübungspreis.

Dann ist

$$A_n = (K - S_n)^+ = (K - S_n)\mathbb{1}_{\{S_n<K\}}, \quad n = 0, ..., N$$

die zugehörige Auszahlung zum Zeitpunkt n.

Eine mögliche Ausübungsstrategie wäre für den Callinhaber:

$$\tau = \min\{\inf\{0 \leq n \leq N \ : \ S_n \geq a\}, N\}$$

mit einem $a > K$, d.h. also, die Strategie des Käufers ist: übe die Option aus, sobald a zum ersten Mal überschritten wird. Wenn das bis zum Zeitpunkt $N - 1$ nicht passiert, übe sie zum Zeitpunkt N aus oder lasse sie verfallen.

2)Man betrachte die amerikanische Putoption auf eine Aktie. Seien $S_0, ..., S_N$ die Aktienkurse, K der Ausübungspreis.

Dann ist

$$A_n = (K - S_n)^+ = (K - S_n)\mathbb{1}_{\{S_n<K\}}, \quad n = 0, ..., N$$

die zugehörige Auszahlung zum Zeitpunkt n.
Eine mögliche Ausübungsstrategie wäre für den Putinhaber:

$$\tau = \min\{\inf\{0 \leq n \leq N \ : \ S_n \leq a\}, N\}$$

mit einem $a < K$, d.h. also, die Strategie des Käufers ist: übe die Option aus, sobald a zum ersten Mal unterschritten wird. Wenn das bis zum Zeitpunkt $N-1$ nicht passiert, übe sie zum Zeitpunkt N aus oder lasse sie verfallen.

3 Preisfestsetzung für einen amerikanischen Claim

Frage: Was ist der fairer Preis eines amerikanischen Claims?
Wir betrachten weiterhin ein diskretes, arbitragefreies, vollständiges Finanzmarktmodell. Der Kauf eines amerikanischen Claims A ist äqiuvalent zum Erwerb der Möglichkeit genau einen Claim aus sämtlichen Claims der Form $C(A, \tau)$ frei wählen zu können, da die Option zu jedem Zeitpunkt bis N ausführbar ist. Deshalb definieren wir den fairen Preis eines amerikanischen Claims, als Supremum über die fairen Preise aller Claims der Form (1), die zur Verfügung stehen. Es gilt also

$$p_0(A) = \sup_{\tau} p(C(A, \tau)) \tag{3}$$

Befindet man sich im Zeitpunkt k=1,...,N-1, so sind nur noch die Zeitpunkte k,...,N zur Ausübung möglich (da k in diesem Fall die Rolle des Anfangspunktes übernimmt) mit resultierender Preisfestsetzung:

$$p_k(A) = \sup_{\tau \geq k} p(C(A, \tau))$$

Die Vollständigkeit des Modells, die wir vorausgesetzt haben, sichert die Absicherbarkeit von $C(A, \tau)$ für alle Stopzeiten τ und die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes P^* und des fairen Preises (2.Fundamentalsatz der Preistheorie).

Also können wir den (eindeutigen) fairen Preis mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes P^* als mittlere abdiskontierte Claimauszahlung bgl. $\mathcal{F}$ darstellen:

$$p_0(A) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^*(B_\tau A_\tau \mid \ \mathcal{F}_0) \tag{4}$$

und

$$p_k(A) = \sup_{\tau \geq k} 1/B_k \mathbb{E}^*(B_\tau A_\tau \mid \ \mathcal{F}_k)$$

Um nun den fairen Preis eines Amerikanischen Claims zum Zeitpunkt 0 bestimmen zu können, muss man die Optimierungsaufgabe $\sup_\tau \mathbb{E}^*(B_\tau A_\tau | \ \mathcal{F}_0) \ = \ \sup_\tau \mathbb{E}^*(B_\tau A_\tau)$ (da $\mathcal{F}_0$ trivial ist) berechnen. Dafür liegt die Theorie des optimalen Stoppens vor.

3.1 Das Problem des optimalen Stoppens

Als Käufer einer amerikanischen Option, steht man immer vor der Frage: Welche Entscheidung ist optimal?

Sei $S := \{\tau \mid \tau Stopzeit\}$. Dann lautet das Problem des optimalen Stoppens:

$$\text{Maximiere } \mathbb{E}(A_\tau) \text{ über } \tau \in S$$

bestimme also

$$\begin{aligned} v :=& \ sup_{\tau \in S} \ \mathbb{E}(A_\tau) \text{ und } \tau^* \in S \\ \text{mit } \ \mathbb{E}(A_{\tau^*}) =& \ sup_{\tau \in S} \ \mathbb{E}(A_\tau) \end{aligned}$$

Wir setzen: $S_{[r,t]} \ = \ \{\tau \in S : \ r \leq \tau \leq t\}$ und $v_{[r,t]} := sup_{\tau \in S_{[r,t]}} \mathbb{E}(A_\tau)$

Im Allgemeinen sind optimale Stopzeiten nicht so leicht explizit zu bestimmen. Deswegen versucht man dieses Problem durch Rückwärtsinduktion zu lösen.

4 Prinzip der Rückwärtsinduktion

Man betrachte ein allgemeines Stopproblem mit der Zeitparametermenge $T = \{0, ..., N\}$.

Beachte: Ist die Option bis zum Zeitpunkt n noch nicht ausgeübt worden, so ist nur noch $\tau \in S_{[n,N]}$ möglich.

- n=N:

  d.h man befindet sich im Zeitpunkt N ohne vorher gestoppt zu haben. Es ist also nur $\tau = \ N$ möglich. Somit muss der Optionsinhaber die Auszahlung $A_N =: \ U_{[N,N]}$ akzeptieren.

- n=N-1:

  d.h man hat die Möglichkeit im Zeitpunkt $N-1$ die Option zu stoppen. Es ist also $\tau \in S_{[N-1,N]}$ möglich. Dann steht man vor der Entscheidung, ob man sofortige Ausübung ausführen soll, die im Resultat die Auszahlung A_{N-1} ergibt oder man führt weitere Beobachtung durch, obwohl zu dem aktuellen Zeitpunkt die zukünftige Auszahlung A_N nicht bekannt ist. Folgendes Entscheidungskriterium bietet sich für den Titelinhaber also an:

I) Stoppe im Zeitpunkt $N-1$, falls $A_{N-1} \geq \ \mathbb{E}(A_N|\mathcal{F}_{N-1}) = \ \mathbb{E}(U_{[N,N]}|\mathcal{F}_{N-1})$
II) Führe weitere Beobachtungen durch, falls $A_{N-1} < \ \mathbb{E}(A_N|\mathcal{F}_{N-1}) = \ \mathbb{E}(U_{[N,N]}|\mathcal{F}_{N-1})$
(In diesem Fall ist die Ausübung zum Zeitpunkt N vorzuziehen).
Somit beträgt der bedingte erwartete Wert zum Zeitpunkt N-1:

$$U_{[N-1,N]} := \ max \ \{A_{N-1}, \ \mathbb{E}(U_{[N,N]}| \ \ \mathcal{F}_{N-1})\}$$

Analog schließt man für allgemeines $0 \leq n \leq N-1$ rekursiv:
I) Stoppe im Zeitpunkt n, falls $A_n \geq \mathbb{E}(U_{[n+1,N]}|\mathcal{F}_n)$
II) Führe weiter Beobachtungen durch, falls $A_n < \mathbb{E}(N_{[n+1,N]}|\mathcal{F}_n)$
Somit ist der resultierende Wert:

$$U_{[n,N]} = \max\{A_n, \ \ \mathbb{E}(U_{[n+1,N]}| \ \ \mathcal{F}_n)\}$$

D.h. also, der Titelinhaber hat in jedem Zeitpunkt $n \in T$ die Wahl zwischen sofortigem Ausüben und Halten, wobei der Wert der sofortigen Ausübung anhand des Aktienkurses ersichtlich ist.

Man stellt sich die Frage: Welche Strategie verfolgt der Verkäufer einer amerikanischen Option? Sei U_n der minimale Betrag, den der Verkäufer zum Zeitpunkt n braucht, um sich gegen einen bis zum Zeitpunkt $n-1$ noch nicht ausgeübten amerikanischen Claim A absichern zu können.

- n= N:
  dann gilt $U_{[N,N]} = \ A_N$

- n= N-1:
  dann ist die erste Vorraussetzung, dass $U_{[N-1,N]} \geq A_{N-1}$. Ausserdem muss $U_{[N-1,N]}$ groß genug sein, um A_N hedgen zu können (für den Fall, dass die Option zum Zeitpunkt $N-1$ noch nicht ausgeübt wird), d.h.
  $U_{[N-1,N]} \geq \ \mathbb{E}(A_N| \ \mathcal{F}_{N-1}) = \ \mathbb{E}(U_{[N,N]}| \ \mathcal{F}_{N-1})$.
  Es gilt also: $U_{[N-1,N]} = \ \max\{A_{N-1}, \ \mathbb{E}(U_{[N,N]}| \ \mathcal{F}_{N-1})\}$. Dieses Argument setzt man rekursiv für $n = 0, N-2$ fort und man erhält dasselbe Ergebnis wie oben.

Das möchte ich gleich im Satz 4.1 zusammenfassen:

Satz 4.1 *Betrachtet werde ein Stoppproblem mit* $T = [0, 1, ..., N]$
Definiere rekursiv:

$$U_{[N,N]} := A_N \tag{5}$$

$$U_{[N-1,N]} := \max\{A_{N-1}, \quad \mathbb{E}(U_{[N,N]}| \ \mathcal{F}_{N-1})\} \tag{6}$$

$$U_{[n,N]} := \max\{A_n, \quad \mathbb{E}(U_{[n+1,N]}| \ \mathcal{F}_n)\}, \quad n = N-2, ..., 0. \tag{7}$$

Ferner sei für n=0,1,...,N, mit $U_{[N+1,N]} = U_{[N,N]}$

$$\begin{aligned} \tau_{[n,N]} &= \inf\{k \geq n : A_k \ = \ U_{[k,N]}\} \\ &= \inf\{k \geq n : A_k \ \geq \ \mathbb{E}(U_{[k+1,N]} \mid \ \mathcal{F}_k)\} \end{aligned} \tag{8}$$

Dann gilt für n=0,...,N

$$\begin{aligned} U_{[n,N]} = & \ \mathbb{E}(A_{\tau_{[n,N]}}| \ \ \mathcal{F}_n) \\ = & \ sup_{\tau \in S_{[n,N]}} \mathbb{E}(A_\tau| \ \ \mathcal{F}_n) \\ & \geq \mathbb{E}(A_\tau| \ \ \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

für alle $\tau \in S_{[n,N]}$*, d.h.* $U_{[n,N]}$ *ist der faire Preis von A zum Zeitpunkt n, also*

$$\mathbb{E}(A_{\tau_{[n,N]}}) = \mathbb{E}(U_{[n,N]}) \geq \mathbb{E}(A_\tau) \tag{9}$$

für für alle $\tau \in S_{[n,N]}$
Insbesondere folgt:

$$v_{[n,N]} = \ \mathbb{E}(U_{[n,N]}), \ \tau_{[n,N]} \ \textit{ist optimal in } S_{[n,N]}$$

und

$$\tau^* = \ \tau_{[0,N]} \ \textit{ist optimal.}$$

Es ist also z.B. für $n = 0:$ $\mathbb{E}(U_{[0,N]}) = \mathbb{E}(A_{\tau_{[0,N]}}) = sup_{\tau \in S_{[0,N]}} \mathbb{E}(A_\tau)$*, d.h.* $\mathbb{E}(U_{[0,N]})$ *ist der faire Preis des Amerikanischen Claims und* $\tau_{[0,N]}$ *ist optimale Ausübungsstrategie.*

Beweis: Zuerst möchte ich zeigen, dass $\tau_{[n,N]} \in S_{[n,N]}$ für n=0,...,N ist. Setze $n \in \{0, 1, ..., N\}$ fest, dann gilt:

$$\tau_{[n,N]} \geq n$$

nach Definition und

$$\tau_{[n,N]} \leq N$$

da $U_{[N,N]} = A_N$ ist.
$U_{[k,N]}$ und A_k sind $\mathcal{F}_k$-meßbar für jedes $k \in \{0, ...N\}$. Das folgert also für jedes $s \in \{n, n+1, ..., N\}$

$$\{\tau_{[n,N]} = s\} = \{A_k < U_{[k,N]} \text{ für } k \in [n,s) \text{ und } A_s = U_{[s,N]}\} \in \mathcal{F}_s$$

Also ist $\tau_{[n,N]}$ eine Stopzeit. Für die Dürchführung des restlichen Beweises, wendet man die Rückwärtsinduktion für alle n=0,...,N an.
Also, zuerst betrachte man n=N, dann gilt

$$\begin{aligned} U_{[N,N]} &= A_N \qquad (nach \;\; (5)) \\ \tau_{[N,N]} &= N \\ S_{[N,N]} &= \{\tau_{[N,N]}\} = \{N\} \end{aligned}$$

Also

$$\mathbb{E}(A_{\tau_{[N,N]}}| \;\; \mathcal{F}_N) = \mathbb{E}(A_N| \;\; \mathcal{F}_N) = A_N = U_{[N,N]}$$

folglich

$$\mathbb{E}(A_{\tau_{[N,N]}}) = \mathbb{E}(A_N) = \mathbb{E}(U_{[N,N]})$$

für $\tau \in S_{[N,N]}$
Die Behauptung sei somit richtig für $n \in \{1, ..., N\}$.
$n \mapsto n-1$: Seien $F \in \mathcal{F}_{n-1},\ \tau \in S_{[n-1,N]}$ und $\tilde{\tau} := max\{\tau, n\}$.

Offensichtlich gilt: $\tilde{\tau} \in S_{[n,N]}$. Folglich bekommen wir:

$$\int_F A_\tau \ \ dP = \int_{F \bigcap \{\tau = n-1\}} A_\tau \ \ dP + \int_{F \bigcap \{\tau > n-1\}} A_\tau \ \ dP$$

$$= \int_{F \bigcap \{\tau = n-1\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{\tau > n-1\}} A_{\tilde{\tau}} \ \ dP$$

$$= \int_{F \bigcap \{\tau = n-1\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{\tau > n-1\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_{\tilde{\tau}} \mid \ \mathcal{F}_n)| \ \mathcal{F}_{n-1}) \ \ dP$$

$\downarrow$ *nach IV*

$$\leq \int_{F \bigcap \{\tau = n-1\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{\tau > n-1\}} \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1}) \ \ dP$$

$\downarrow$ *wegen max*

$$\leq \int_F U_{[n-1,N]} \ \ dP$$

Es folgt also:

$\mathbb{E}(A_\tau \mid \ \mathcal{F}_{n-1}) \leq \ \ U_{[n-1,N]}$.

Die ähnliche Rechnung für die Stopzeit $\tau_{[n-1,N]}$ zeigt:

$$\int_F A_{\tau_{[n-1,N]}} \ \ dP = \int_{F \bigcap \{A_{n-1} \geq \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{A_{n-1} < \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} A_{\tau_{[n-1,N]}} \ \ dP$$

$\downarrow (da\ \tau_{[n-1,N]} = \ \tau_{[n,N]}, falls\ \tau_{[n-1,N]} > \ n-1\ ist)$

$$= \int_{F \bigcap \{A_{n-1} \geq \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{A_{n-1} < \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} A_{\tau_{[n,N]}} \ \ dP$$

$$= \int_{F \bigcap \{A_{n-1} \geq \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{A_{n-1} < \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} \mathbb{E}(A_{\tau_{[n,N]}} \mid \ \mathcal{F}_{n-1}) \ \ dP$$

$\downarrow nachIV$

$$= \int_{F \bigcap \{A_{n-1} \geq \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} A_{n-1} \ \ dP + \int_{F \bigcap \{A_{n-1} < \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1})\}} \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \ \mathcal{F}_{n-1}) \ \ dP$$

$$= \int_F U_{[n-1,N]} \ \ dP$$

$(denn\ \{\tau_{[n-1,N]} = \ n-1\} = \ \{U_{[n-1,N]} = \ A_{n-1}\})$

Es folgt: $\mathbb{E}(A_{\tau_{[n-1,N]}} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = U_{[n-1,N]}$.

Daraus folgt also für jede Stopzeit $\tau \in S_{[0,N]}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_{[0,N]}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_{\tau_{[0,N]}} \mid \mathcal{F}_0)) \\ &= \mathbb{E}(A_{\tau_{[0,N]}}) \\ &\geq \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_\tau \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(A_\tau) \end{aligned}$$

□

Weiter gilt folgender Satz:

Satz 4.2 *Seien $A := (A_n)_{0\leq n\leq N}$ und $U := (U_n)_{0\leq n\leq N}$ definiert wie oben. Dann gilt:*

(i) $U \geq A$

(ii) *U ist ein Supermartingal*

(iii) *Ist $Y := (Y_n)_{0\leq n\leq N}$ ein weiteres Supermartingal mit $Y \geq A$, so ist $Y \geq U$*

U heißt ein minimales dominierendes Supermartingal zu A.

Beweis:

Aus der Definition $U_{[n-1,N]} := \max\{A_{n-1}, \mathbb{E}(U_{[n,N]} \mid \mathcal{F}_{n-1})\}$, $n = 0, ..., N$ folgen sofort (i) und (ii).

(iii) wird durch Rückwärtsinduktion bewiesen: Wir nehmen an, dass Y ein beliebiges Supermartingal mit $Y \geq A$ für alle $n \in \{0, ..., N\}$ ist. Dann gilt:

$Y_{[N,N]} \geq A_N = U_{[N,N]}$.

Für ein festes $n \leq N$ sei $Y_{[n,N]} \geq U_{[n,N]}$. Da Y Supermartingal ist, gilt:

$Y_{[n-1,N]} \geq \mathbb{E}^*(Y_{[n,N]} \mid \mathcal{F}_{n-1})$. Dann gilt:

$Y_{[n-1,N]} \geq \mathbb{E}^*(U_{[n,N]} \mid \mathcal{F}_{n-1})$ (nach Induktionsvorraussetzung).

Andererseits dominiert Y die Auszahlung A. Es gilt also: $Y_{[n-1,N]} \geq A_{[n-1,N]}$.

Dann ist:

$Y_{[n-1,N]} \geq \max\{A_{n-1}, \mathbb{E}^*(U_{[n-1,N]} \mid \mathcal{F}_{n-1})\} = U_{[n-1,N]}$ □

4.1 Konstruktion eines Hedges

Unser Ziel ist nun zu zeigen, dass der amerikanische Claim durch einen Hedge abgesichert werden kann.
Da der Inhaber des amerikanischen Claims den Ausübungszeitpunkt wählen kann, muss der Wert eines absichernden Portfolios jederzeit wenigstens gleich der jeweiligen Claimhöhe sein.

Definition 4.3 Gegeben sei ein arbitragefreies N-Perioden Modell mit äquivalentem Martingalmaß P^*, eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ mit $\mathcal{F}_o = \{\emptyset, \Omega\}$. A heißt dann absicherbar bzw. hedgebar, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H existiert, so dass gilt:

$$V(H) \geq A$$

H heißt dann Hedge zu A.

Somit sichert sich der Verkäufer eines amerikanischen Claims im Zeitpunkt 0 zum Preis $V_0(H) = H_0 S_0$ von möglichen Ansprüchen des Käufers ab. Ein großer Vorteil ist dabei, dass der Verkäufer dafür keine zusätzliche Mittel zuzuführen braucht.
Das Ziel ist nun: Konstruktion eines selbstfinanzierenden Hedges für einen amerikanischen Claim A zum Anfangsportfoliopreis

$$V_0(H) = H_0 S_0 = p_0(A) = sup_\tau \ \mathbb{E}^*(A_\tau / B_\tau \mid \mathcal{F}_0)$$

Dafür betrache man das Stopproblem mit Auszahlungsprozess $(B_n A_n)_{n=0,\dots,N}$ und das dazugehörige dominierende Supermartingal U, konstruiert nach dem Prinzip der Rückwärtsinduktion. Nach Finanzmathematik I kann man U mit Doob-Meyer-Zerlegung darstellen als:

$$U = M + A$$

wobei $M = (M_n)_{0\leq n\leq N}$ ein Martingal ist und $A = (A_n)_{0\leq n\leq N}$ monoton fallender, vorhersehbarer Prozess mit $A_0 = 0$, und M und A eindeutig bestimmt sind.

Satz 4.4 *Der Claim $C = (0, ..., 0, M_N/B_N)$ sei hedgebar (absicherbar). H sei zugehöriger Hedge. Dann ist H auch ein Hedge für den amerikanischen Claim A, und es gilt: $H_0S_0 = \; p_0(A)$*

Beweis: Da H selbstfinanzierend ist und $(V_0(H)B_n)_{n=0,...,N}$ ein Martingal bzgl. des äquivalenten Maßes P^* ist, folgt:

$$\begin{aligned} V_N(H)B_N &= M_N, \quad (da\, H\, hedged\, C) \\ &\geq U_N \quad (da\, Doob - Meyer - Zerlegung) \\ &= A_N B_N \quad (da\, nach\, Definition\, von\, U) \end{aligned}$$

Somit folgt mit der Martingaleigenschaft:

$$\begin{aligned} V_n(H)B_n &= \mathbb{E}^*(V_N(H)B_N| \; \mathcal{F}_n) \quad (Martingaleigenschaft) \\ &= \mathbb{E}^*(M_N| \; \mathcal{F}_n) = \; M_n \quad (Martingaleigenschaft\ von\ M) \\ &\geq U_n \quad (wegenDoob - Meyer - Zerlegung) \\ &= A_nB_n \quad (nach\ Definition\ von\ U) \end{aligned}$$

für $n = 0, ..., N - 1$, also

$$V(H) \; \geq \; A$$

Somit ist H ein Hedge für amerikanischen Claim A.

Weiter kann man mit Hilfe der Martingaleigenschaft den Anfangspreis des Portfolios berechnen:

$$\begin{aligned} V_0(H) = \; H_0S_0 \; &= \; V_0(H)B_0 \\ &= \; \mathbb{E}^*(V_N(H)B_N) \; = \; \mathbb{E}^*(M_N) \\ &= \; M_0 \; = \; U_0 \\ &= \; p_0(A), \quad (nachSatz4.1) \end{aligned}$$

$\square$

Somit konstruiert man also einen Hedge für einen amerikanischen Claim, indem man den Hedge für einen durch die Doob-Meyer-Zerlegung eindeutig bestimmten europaischen Claim berechnet. Dies liefert einen Hedging- Ansatz für den fairen Preis eines amerikanischen Claims A. Definiere:

$$p^* := \inf \{H_0 S_0 \mid H \text{ ist selbstfinanzierender Hedge für } A\}$$

Dann gilt unter der Voraussetzung der Absicherbarkeit des Claims $C = (0, ..., 0, M_N/B_N)$:

$$p^* \leq p_0(A)$$

Andererseits erhält man für jeden selbsfinanzierenden Hedge H:

$$V_n(H)B_n \geq A_n B_n$$

für $n = 0, ..., N$.
$V_n(H)B_n$ ist ein Martingal, also insbesondere ein Supermartingal, dann gilt mit der Minimalität von U:

$$V_n(H)B_n \geq U_n$$

für $n = 0, ..., N$.
Damit folgt: $H_0 S_0 = B_0 V_0(H) \geq U_0 = p_0(A)$ und $p^* \geq p_0(A)$.
Also ist $p^* = p_0(A)$

5 Anwendung auf das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Man betrachte die Aktienpreise

$$S_n = S_0 Y_1 Y_2 ... Y_n,$$

wobei $0 \leq n \leq N$ und $Y_1, ..., Y_n$ bzgl. P^*stochastisch unabhängig und identisch verteilt seien. Es gelte:

$$p^* := P^*(Y_n = u) = (1+r-d)/(u-d),$$
$$P^*(Y_n = d) = 1-p^*$$

$A := (A_n)_{0 \leq n \leq N}$ sei ein amerikanischer Claim mit diskontierten Auszahlungen:

$$(1+r)^n A_n =: h_n(S_n) \text{ für } n = 0, ..., N$$

wobei h eine messbare Funktion sei.
Betrachtet man eine Put-Option, so ist $h_n(S_n) = (1+r)^n(K - S_n)$, wobei K der Ausübungspreis ist.
Man bestimmt den Preis eines amerikanischen Claims am effizientesten rekursiv, d.h. man folgt dem Binomialbaum von rechts nach links.
Wir berechnen also den fairen Preis zur Zeit 0 (den Wert ${w_0}^N$), indem wir die ${w_{N-n}}^n$ (die fairen Preise zum Zeitpunkt n=0,...,N) bestimmen. Wir beschränken uns hier auf den Fall N=3:
Entsprechend der Definition von $U_{[n,N]}$ lassen sich die ${w_{N-n}}^n$ folgendermassen berechnen:

$$
\begin{aligned}
{w_2}^1(S_0u^2) &= p^* h_3(S_0u^3) + (1-p^*)h_3(S_0u^2d) \\
{w_2}^1(S_0ud) &= p^* h_3(S_0u^2d) + (1-p^*)h_3(S_0ud^2) \\
{w_2}^1(S_0d^2) &= p^* h_3(S_0ud^2) + (1-p^*)h_3(S_0d^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{w_1}^2(S_0u) &= p^* max\{h_2(S_0u^2),\ {w_2}^1(S_0u^2)\} + (1-p^*)max\{h_2(S_0ud),\ {w_2}^1(S_0ud)\} \\
{w_1}^2(S_0d) &= p^* max\{h_2(S_0ud),\ {w_2}^1(S_0ud)\} + (1-p^*)max\{h_2(S_0d^2),\ {w_2}^1(S_0d^2)\}
\end{aligned}
$$

$$
{w_0}^3(S_0) = p^* max\{h_1(S_0u),\ {w_1}^2(S_0u)\} + (1-p^*)max\{h_1(S_0d),\ {w_1}^2(S_0d)\}
$$

Der Wert ${w_0}^3(S_0)$ ist folglich der faire Preis eines amerikanischen Claims zur Zeit 0 im binomialen Modell.