Mertonscher Firmenwertansatz zur Modellierung von Kreditrisiken

Seminararbeit von Marleen Laakmann

2. Mai 2010

Einleitung

Zur Messung und Steuerung von Kreditrisiken gibt es eine Reihe von Methoden und Modellen. Das **Kreditrisiko** ist die Wahrscheinlichkeit möglicher ökonomischer Einbußen, falls eine Partei ihren Vertragsverpflichtungen nicht nachkommen kann oder die vertragliche Gegenleistung nicht zum ausgemachten Zeitpunkt erfolgt. Dabei kann die Nichterfüllung von vertraglichen Leistungen sowohl auf den Ausfall von Zahlungen, also die finanzielle Leistungserfüllung, als auch auf die Warenauslieferung bezogen werden. Zur Berechnung des Kreditrisikos müssen die folgenden 3 Punkte besonders berücksichtigt werden:

- Die Höhe des Kreditbetrages (Exposure) ist wichtig zur Risikoquantifizierung
- Durch Zahlungsstörungen eines Handelspartners (Default) ergeben sich Verluste, deren Höhe von der Verlustrate abhängt
- Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of default)

Für meinen Vortrag ist besonders die Ausfallwahrscheinlichkeit von Kreditrisiken von Bedeutung. Kreditrisikomodelle zur Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten kann man in 2 Kategorien einteilen:

- intensitätsbasierte Verfahren/ Ratings
- unternehmenswertbasierte Verfahren

Im Folgenden liegt das Interesse nur bei den unternehmenswertbasierten Verfahren. Die Idee dabei ist, dass Unternehmen als insolvent angesehen werden, wenn der Unternehmenswert unter eine bestimmte Grenze gesunken ist. Diese Grenze kann z.B. die Summe der Verbindlichkeiten des Unternehmens sein. Aus der zeitlichen Entwicklung des Unternehmens kann man dann die Ausfallwahrscheinlichkeit

errechnen. Das **Mertonsche Modell** ist der Prototyp aller unternehmenswertbasierten Verfahren. Es kann sowohl genutzt werden um die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit zu bestimmen, als auch um den Credit Spread der Verbindlichkeiten zu berechnen.
Um das Ausfallrisiko einer Firma für ein Zeitintervall [0,T]zu bewerten sind einige Bezeichnungen notwendig:

Sei $(A_t)_{t\in[0,T]}$ ein stochastischer Prozess, der die zukünftge Entwicklung des Firmenwertes modelliert.

$A_t \triangleq$ Wert der Firma zum Zeitpunkt t
$D_t \triangleq$ Bewertung der Verbindlichkeiten in t
$E_t \triangleq$ Wert des Eigenkapitals in t
Es gilt:

$$A_t = D_t + E_t$$

Annahmen:

- Alle Verbindlichkeiten werden in T fällig
- F sei die Summe aller dieser Kredite
- der Verbindlichkeitswert bleibt über den gesamten Zeitraum gleich

d.h. in T muss die Firma die Verbindlichkeit F bedienen.
Es gilt folgendes:

- je risikoreicher die Entwicklung der Firma, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass F nicht gezahlt werden kann, desto geringer ist der Preis D_t, den die Kreditgeber in t bereit sind zu zahlen um F in T zu erhalten.
- $D_t < Fe^{-r(T-t)} \qquad t \in [0, T]$ r:= risikolose Zinsrate

Risikoneutraler Ansatz zur Bewertung von $(D_t)_{t\in[0,T]}$ und $(E_t)_{t\in[0,T]}$

1. Sicht des Kreditgebers:

Es kommt zum Ausfall des Investments, wenn $A_T < F$gilt
$\Rightarrow$ Verlust beträgt $F - A_T$
Der Kreditgeber kauft, um das Risiko zu neutralisieren, eine Put-Option auf A_T mit Basis F und maturity T
Kredit und Put-Option haben in T zusammen den Wert von

- F falls $A_T \geq F$
- $A_T + (F - A_T)$ falls$A_T < F$

Im ersten Fall verfällt die Put-Option, im zweiten Fall nimmt die Put-Option das Ausfallrisiko auf.

$\Rightarrow$ Kredit und Put-Option liefern zusammen die sichere Auszahlung von F in T
Mit dem Replikationsprinzip folgt :

$$D_t + P(A_t, F, T-t) = Fe^{-r(T-t)}$$

insbes.: $D_0 = Fe^{-rT} - P(A_0, F, T)$

Der t-Wert von Kredit und Put-Option stimmt also mit dem t-Wert der risikolosen Anleihe F überein.
Die Höhe des Put-Preises spiegelt also die Markterwartung darüber wider, dass die Firma den Kredit am Ende der Laufzeit nicht bedienen kann. Je besser das Unternehmen bewertet ist, desto billiger ist die Put-Option.

2. Sicht der Firma bzw. des Eigenkapitalgebers

Die Eigenkapitalgeber können die Firma in T liquidieren und erhalten A_T
Es können 2 Fälle eintreten:

- $A_T < F$
- $A_T \geq F$

Den ersten Fall bezeichnet man als den "Default-Fall". Der Firmenwert reicht nicht aus um die Verbindlichkeiten vollständig zu bedienen. Da der Firmenwert vollständig dafür genutzt wird um F zu bedienen, erhalten die Eigenkapitalgeber keine Auszahlung.
Im zweiten Fall wird der Firmenwert zuerst genutzt um die Verbindlichkeiten vollständig zu bedienen. Die Eigenkapitalgeber erhalten eine Auszahlung von $(A_T - F)^+$ in T.

Es gilt also:
$E_T = max\{A_T - F, 0\} = (A_T - F)^+$ Der Preis von E_t stimmt mit dem t-Wert des Calls auf den Firmenwert überein

$$E_t = c(A_t, F, T-t)$$

Problem: $(A_t)_{t\in[0,T]}$ nicht direkt beobachtbar

$\Rightarrow$ Preise der Optionen nicht berechenbar

Firmenwert aus EK-Entwicklung bestimmen

Voraussetzung:
$(A_t)_{t\in[0,T]}$ verhält sich wie eine geometrische Brownsche Bewegung (wie der Aktienpreisprozess im B.S-Modell)

$$\partial A_t = A_t(\mu\partial t + \sigma_A \partial B_t) \qquad (stochastischeDGL)$$

- $\sigma_A > 0$ sei die Volatilität
- $\mu \in \mathbb{R}$ bezeichne die Driftrate
- (B_t) Brownsche-Bewegung

Es gilt:

$$A_t = A_0 e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)}$$

$$= A_0 e^{(\mu t)} e^{(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)}$$

im B.-S.-Modell ergibt sich folgende Preisformel:

$$c(A_0, F, T) = E_0 = A_0 \Phi(\underbrace{\frac{log(\frac{A_0}{F}) + (r + \frac{1}{2}\sigma_A^2 T)}{\sqrt{\sigma_A^2 T}}}_{g_1(A_0,T)}) - Fe^{-rt}\Phi(\underbrace{\frac{log(\frac{A_0}{F}) + (r - \frac{1}{2}\sigma_A^2 T)}{\sqrt{\sigma_A^2 T}}}_{g_2(A_0,T)}) \qquad (1)$$

mit $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ Verteilungsfunktion der N(0,1)-Verteilung

Für den Put-Preis gilt:

$E_0 = c_0 = A_0 - Fe^{-rT} + p_0$

$\Leftrightarrow A_0\Phi(g_1) - Fe^{-rT}\Phi(g_2) + Fe^{-rT} - A_0 = p_0$

$\Leftrightarrow Fe^{-rT}(1 - \Phi(g_2)) - A_0(1 - \Phi(g_1) = p_0$

$\Leftrightarrow p_0 = Fe^{-rT}\Phi(-g_2) - A_0\Phi(-g_1)$

Es gilt:

$E_t = c(A_t, F, T-t) \qquad t \in [0, T]$

E_t ist durch die Marktkapitalisierung des Aktienkapitals am Markt beobachtbar. Um die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit zu berechnen, benötigt man die heutigen Vermögenswerte A_0 und deren Volatilitäten σ_A. Mit dem Lemma von Ito folgt:

$$\partial E_t = \partial c(A_t, F, T-t) = [-\partial_t c + \frac{1}{2}\partial_A^2 A_t^2 \sigma_A^2 + \partial_A c_\mu]dt + [\underbrace{\partial_A c \sigma_A A_t}_{Vol.\ des\ EK\ \sigma_E}]dB_t$$

wobei $\partial_A c$ nach (1) $\Phi(g_1(A_t, T-t))$ entspricht.
Da die Dynamik von E_t einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt, erhält man insgesamt:
$\sigma_E = \sigma_A A_t \Phi(g_1(A_t, T-t))$ (2)

Mit (1) und (2) hat man dann 2 Gleichungen in 2 Unbekannten (A_t, σ_A) *bzw.* (A_0 und $\sigma_A$für t=0)
Diese Gleichungen können mit numerischen Verfahren (z.B. 2-dim. Newton-Verfahren) nach A_t bzw.A_0 und σ_A aufgelöst werden.

Als Bewertung für F erhält man $D_0 = A_0 - E_0$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(A_T < F) &= P(\tfrac{A_T}{A_0} < \tfrac{F}{A_0}) \\
&= P(log(\tfrac{A_T}{A_0}) < log(\tfrac{F}{A_0})) \\
&= P(log(\tfrac{A_0 exp(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2)T + \sigma_A B_T}{A_0}) < log\tfrac{F}{A_0}) \\
&= P(\sigma_A B_T + mT < log(\tfrac{F}{A_0})) \qquad \text{mit } m = \mu - \tfrac{1}{2}\sigma_A^2 \\
&= P(\tfrac{B_T}{\sqrt{T}} < \tfrac{log(\frac{F}{A_0} - mT)}{\sigma_A \sqrt{T}}) \\
&= \Phi(\tfrac{log(\frac{F}{A_0}) + (r - \frac{1}{2}\sigma_A^2 T)}{\sqrt{\sigma_A^2 T}})
\end{aligned}$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit hängt also von der unterstellten Drift des Firmenwertprozesses ab ($m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \mu Drift$). Da der Firmenwertansatz nicht beobachtbar ist, kann man die Drift nicht nach historischen Betrachtungen wählen. Aus diesem Grund verwendet man in der Praxis meistens die Driftμ bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes, also $\mu = r$.

Credit Spread

Def: Der Credit Spread ist ein Renditezuschlag, den Investoren bei einer Anlage in ausfallrisikobehafteten Unternehmensanleihen erhalten. Er kompensiert den Anleger für die mit der Investition verbundenen Risiken.

Setze F=1 für Normierungszwecke
Für die Rendite $Y_d(t,T)$ eines ausfallgefährdeten Bonds gilt:

$$Y_d(t,T) = \frac{1}{(T-t)} ln \frac{1}{D(t,T)}$$

$D(T,t)$ ist der Preis des ausfallgefährdeten Bonds der in T eine Auszahlung von 1 hat. Es gilt:

$$\begin{aligned}
D(t,T) &= 1e^{-r(T-t)} - P(A_t, F, T-t) \\
&= A_t - c(A_t, F, T-t) \\
&= A_t - (A_t\Phi(g_1) - e^{-r(T-t)}\Phi(g_2)) \\
&= A_t(1-\Phi(g_1)) + e^{-r(T-t)}\Phi(g_2) \\
&= e^{-r(T-t)}\Phi(g_2) + A_t\Phi(-g_1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Y_d(t,T) = -\frac{1}{T-t} ln(e^{-r(T-t)}\Phi(g_2) + A_t\Phi(-g_1))$

Der Credit Spread s(t,T) ist die Differenz zwischen $Y_d(t,T)$ und der risikolosen Rendite r:

$$\begin{aligned}
s(t,T) &= Y_d(t,T) - r \\
&= -\tfrac{1}{T-t} ln(e^{-r(T-t)}\Phi(g_2) + A_t\Phi(-g_1)) - \underbrace{\frac{1}{T-t} ln(e^{r(T-t)})}_{=r} \\
&= -\tfrac{1}{T-t} ln(\Phi(g_2) + e^{r(T-t)}A_t\Phi(-g_1))
\end{aligned}$$

Der Credit Spread kann also berechnet werden, nachdem A_t berechnet wurde.
Je besser das Kapitalmarktrating, desto geringer ist der Credit Spread.

First passage Modell

Für das Basis-Modell von Merton gilt, dass ein "Default" eintritt, wenn der Firmenwert zum Zeitpunkt T unter den Verbindlichkeiten F liegt. Dies ist jedoch nicht ganz realistisch, da das Verhalten des Firmenwertprozesses vor dem Zeitpunkt T bei dieser Betrachtung keine Rolle spielt. Deshalb kann man das Modell wie folgt erweitern:
Die Kreditgeber haben das Recht die Verbindlichkeit vor T zurückzufordern, wenn der Firmenwertprozess während der Laufzeit eine Barriere unterschreitet.

$\tau := inf\{t \geq 0 : A_t \leq b\}$ bezeichne die "Default-Zeit".

Gilt $\tau < T \Rightarrow$default

$R \in [0, 1]$ sei eine zufällige Recovery-Rate. Die **Recovery-Rate** gibt den prozentualen Anteil an einer Forderung an, den ein Gläubiger nach der Zahlungsunfähigkeit des Forderungsnehmers aus der Verwertung von Sicherheiten oder sonstigen Rechten erhält. Im Default-Fall wird RF zurückgezahlt. Der Verlust entspricht dann (1-R)F.Die Rückzahlung erfolgt erst in T. Der Bond kann dann als Claim aufgefasst werden mit Auszahlung in T von

$F\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} + RF\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}$

$= F - F\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} + RF\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}$

$= F - F(1 - R)\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}$

Als Preis für den ausfallgefährdeten Bond ergibt sich:

$D(t, T) = Fe^{-r(T-t)} - FE^*[(1 - R)e^{-r(T-t)}]\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}$

$= Fe^{-r(T-t)} - Fe^{-r(T-t)}E^*[(1 - R)]P^*(\tau \leq T)$

$= Fe^{-r(T-t)}(1 - E^*[(1 - R)]P^*(\tau \leq T))$

Um den Bond zu bewerten muss man$E^*[(1 - R)]$ sinnvoll wählen um $P^*(\tau \leq T)$zu berechnen.