Seminar: Finanzmathematik

Portfoliooptimierung im vollständigen Finanzmarktmodell

Katharina Hasow

11. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Für ein gegebenes Anfangskapital x wollen wir eine optimale selbstfinanzierende Handelsstrategie bestimmen, so dass der erwartete Nutzen zum Zeitpunkt T maximimal ist. Hierfür betrachten wir zuerst die Eigenschaften der Nutzenfunktion und formulieren das Portfoliooptimierungsproblem. Dieses werden wir dann für ein arbitragefreies und vollständiges Finanzmarktmodell mit endlichem Zustandsraum Ω lösen. Die hier hergeleitete Methode wollen wir dann benutzen um die optimale Handelsstrategie in einem Einperioden CRR-Modell zu bestimmen.

1.1 Nutzenfunktion

Definition 1.1 Eine Funktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ erfüllt die *Inada Bedingung*, falls gilt:

- U ist monoton steigend auf $\mathbb{R}$,
- stetig in $\{U > -\infty\} = \{x \in \mathbb{R}|\ U(x) > -\infty\}$,
- stetig differenzierbar und strikt konkav in $\{U > -\infty\}$,
- $U(x) = -\infty$ für $x \leq 0$ und $U(x) > -\infty$ für $x > 0$,
- $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} U'(x) = \infty$

Die Nutzenfunktion $U(x)$ stellt den Nutzen eines Endvermögens x zum Zeitpunkt T dar und erfüllt die Inada Bedingung.

Beispiel: $U(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{für } x > 0 \\ -\infty, & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$.

1.2 Formulierung des Portfoliooptimierungsproblems

Wir betrachten ein arbitragefreies, diskretes Finanzmarktmodell mit einem abdiskontierten Preisprozeß $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Wobei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ ein endlicher Zustandsraum ist und $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$.
Wir können nun das Maximierungsproblem für den Erwartungswert der Nutzenfunktion mit Anfangskapital x unter allen selbstfinanzierenden Handelsstrategien definieren:

$$u(x) := \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P(U(x + (H \cdot S)_T)), \tag{1}$$

wobei $\mathcal{H}$ der Raum der selbstfinanzierenden Handelsstrategien ist.
$u(x)$ heißt *indirekte Nutzen-Funktion*, sie gibt den optimalen erwarteten Nutzen des Handelns mit Anfangskapital x an.
Dies ist ein einfaches Beispiel für ein Portfoliooptimierungsproblem. Die hierfür hergeleitete Methode lässt sich aber auf komplexere Modelle, die zum Beispiel Entnahmen berücksichtigen, erweitern.
Unser Ziel ist es nun die optimale Handelsstrategie $\hat{H}(x) \in \mathcal{H}$ zum Anfangskapital x zu bestimmen.

2 Maximierungsproblem im vollständigen Modell

Wir betrachten nun ein vollständiges Finanzmarktmodell. Nach dem 2. Fundamentalsatz der Preistheorie existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß Q.
Für die weiteren Überlegungen ist der folgende Satz von großer Bedeutung.

Satz 2.1 *Das Portfoliooptimierungsproblem (1) ist äquivalent zum folgenden Maximierungsproblem:*

$$\mathbb{E}_P U(X_T) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \to max! \tag{2}$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbb{E}_Q X_T = \sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n \leq x, \tag{3}$$

wobei $X_T = (X_T(\omega_n))_{1\leq n\leq N} = (\xi_n)_{1\leq n\leq N}$ *eine beliebige Zufallsvariable ist.*

Beweis: Es ist also zu zeigen:

$$\begin{aligned} u(x) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P(U(x+(H\cdot S)_T)) &= \sup_{\xi_1,\dots,\xi_N,\ \sum_{n=1}^N q_n\xi_n\leq x} \ \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \\ &= \sup_{X_T\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T), \end{aligned}$$

mit $C(x) = \{X_T : \mathbb{E}_Q X_T \leq x\}$.

($\geq$): Sei $X_T = (X_T(\omega_n))_{1\leq n\leq N} = (\xi_n)_{1\leq n\leq N} \in C(x)$. Dies entspricht einer Auszahlung zum Zeitpunkt T mit dem Anfangspreis $y = \sum_{n=1}^N q_n\xi_n \leq x$.
Da das Modell vollständig ist, ist X_T hedgebar. Das heißt, es existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H mit $X_T = y + (H\cdot S)_T$.
Da U monoton steigend ist und $y \leq x$, gilt:
$\mathbb{E}_P U(X_T) = \mathbb{E}_P U(y+(H\cdot S)_T) \leq \mathbb{E}_P U(x+(H\cdot S)_T) \leq \sup_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{E}_P U(x+(H\cdot S)_T)$.
Daraus folgt:

$$\sup_{X_T\in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T) \leq u(x).$$

($\leq$): Setze $X_T = x + (H \cdot S)_T$. Dann ist X_T ein Endvermögen mit Anfangskapital $\mathbb{E}_Q X_T = x$, also ist $X_T \in C(x)$.
Somit ergibt sich:

$$\mathbb{E}_P U(x + (H \cdot S)_T) = \mathbb{E}_P U(X_T) \leq \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T)$$

$$\Rightarrow u(x) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \mathbb{E}_P U(x + (H \cdot S)_T) \leq \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T).$$

$\square$

Somit kann man das ursprüngliche dynamische Maximierungsproblem durch ein statisches mit einer Nebenbedingung erstetzen.
Diese wird mit dem Lagrange-Ansatz gelöst. Die dazugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$$\begin{aligned} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y) &= \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) - y \left(\sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n - x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right) + yx, \end{aligned} \tag{4}$$

dabei ist $y \geq 0$ der Lagrange-Multiplikator.
Man betrachtet nun folgende Funktion:

$$\Psi(y) = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_N} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y), \quad y \geq 0 \tag{5}$$

Durch das Einsetzen der Formulierung (4) in (5) wird das Maximierungsproblem über $\mathbb{R}^N$ in der Gleichung (5) in N Maximierungsprobleme über $\mathbb{R}$ überführt:

$$\sup_{\xi_n} \left(U(\xi_n) - y \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right), \quad 1 \leq n \leq N. \tag{6}$$

Um dieses Maximierungsproblem zu lösen brauchen wir die Definition der konjugierten Funktion.

Definition 2.2 Ist $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ konkav, dann ist

$$V(\eta) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [U(\xi) - \eta \xi], \quad \eta > 0 \tag{7}$$

die konjugierte Fuktion von U.

Die Eigenschaften von V werden im folgenden Satz beschrieben.

Satz 2.3 *U erfülle die Inada Bedingung. Dann besitzt die konjugierte Funktion $V: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ y \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - yx]$ folgende Eigenschaften.*

1. *V hat einen endlichen Wertebereich und ist stetig differenzierbar auf* $(0, \infty)$,
2. *es gilt $-V' = (U')^{-1}$ und V ist strikt konvex auf* $(0, \infty)$,
3. $\lim_{y\searrow 0} V'(y) = -\infty$ *und* $\lim_{y\to\infty} V'(y) = \infty$
4. $U(x) = \inf_y[V(y) + yx], \quad x \in \{U > -\infty\}$

Beweis: $V(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - yx]$ für $y > 0$.
$U(x)$ ist strikt konkav und $(-yx)$ ist konkav $\Rightarrow$ $U(x) - yx$ ist konkav.
Eine konkave Funktion f besitzt ein globales Maximum an der Stelle x genau dann, wenn $f'(x) = 0$.
Sei $f(x) = U(x) - yx$, dann gilt
$f'(x) = U'(x) - y = 0 \Leftrightarrow U'(x) = y.$
$U'(x) \in (0, \infty)$ ist stetig und streng monoton fallend, da U stetig differenzierbar und strikt konkav ist.
$\Rightarrow U' : \{U > -\infty\} \to (0, \infty)$ ist bijektiv
$\Rightarrow$ es existiert eine Umkehrfunktion $(U')^{-1}$ von U'.
Somit wird das Maximum an der Stelle $\hat{x}(y) = (U')^{-1}(y)$ angenommen.
$\Rightarrow V(y) = U(\hat{x}(y)) - y\hat{x}(y)$.

zu 1: V ist stetig differenzierbar, da U stetig differenzierbar ist.
Für alle $y \in (0, \infty)$ gilt $(U')^{-1}(y) \in \{U > -\infty\} = (0, \infty)$.
$\Rightarrow U((U')^{-1}(y)) \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow V(y) \in \mathbb{R}$ für alle $y \in (0, \infty)$. Somit hat V einen endlichen Wertebereich.

zu 2:

$$\begin{aligned} V'(y) &= U'((U')^{-1}(y)) \left((U')^{-1}\right)'(y) - \left((U')^{-1}(y) + y((U')^{-1})'(y)\right) \\ &= y((U')^{-1})'(y) - ((U')^{-1}(y) + y((U')^{-1})'(y)) = -(U')^{-1}(y). \end{aligned}$$

V ist genau dann strikt konvex, wenn V' streng monoton wachsend ist. Es gilt:
U ist streng konkav $\Leftrightarrow U'$ ist streng monoton fallend
$\Rightarrow (U')^{-1}$ ist streng monoton fallend
$\Rightarrow V'(y) = -(U')^{-1}(y)$ ist streng monoton wachsend.
$\Leftrightarrow V$ ist strikt konvex.

zu 3: $\lim_{y \searrow 0} V'(y) = -\lim_{y \searrow 0} (U')^{-1}(y)$.
$U'(x) = 0 \Leftrightarrow x \to \infty \quad \Rightarrow \quad (U')^{-1}(y) \to \infty$ für $y \to 0$
$\Rightarrow \lim_{y \searrow 0} V'(y) = -\infty$.
$\lim_{y \to \infty} V'(y) = -\lim_{y \to \infty} (U')^{-1}(y)$.
$U'(x) = \infty \Leftrightarrow x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \to \infty} (U')^{-1}(y) = 0$.
$\Rightarrow \lim_{y \to \infty} V'(y) = 0$.

zu 4: Die Funktion $f(y) = V(y) + yx$ besitzt einen globalen Minimierer y mit $V'(y) = -x \Leftrightarrow (U')^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = U'(x)$.
Somit gilt für $V(y) = U((U')^{-1}(y)) - y(U')^{-1}(y)$

$$\begin{aligned}
\inf_y [V(y) + yx] &= V(U'(x)) + xU'(x) \\
&= U((U')^{-1}(U'(x))) - U'(x)(U')^{-1}(U'(x)) + xU'(x) \\
&= U(x) - U'(x)x + xU'(x) = U(x).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4 Erfüllt V die Eigenschaften aus dem Satz 2.3, so erfüllt U, definiert durch 4., die Inada Bedingung.
Dies kann man sich analog zu oben überlegen.

Bevor wir uns wieder dem Maximierungsproblem zuwenden, wollen wir uns an zwei wichtigen Beispielen anschauen, wie man für eine Nutzenfunktion U die konjugierte Funktion V bestimmt:

1. $U(x) = \ln(x), \quad x > 0$.
   Aus (7) folgt dann: $V(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (U(x) - yx)$.

Dies ist ein einfaches Maximierungsproblem für eine differenzierbare Funktion $f(x) = \ln(x) - yx$ für ein $y > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - y \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}.$$

Somit erhalten wir:

$V(y) = \ln(\frac{1}{y}) - y\frac{1}{y} = -\ln(y) - 1.$

2. $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}.$

   Setze $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} - yx$ für ein festes $y > 0$. Dann gilt:

   $f'(x) = x^{\alpha-1} - y \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{\alpha-1}}.$

   Somit erhalten wir:

   $V(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \; f(x) = f(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = \frac{1-\alpha}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$.

Nun wenden wir uns wieder dem Maximierungsproblem zu.

Aus dem Satz 2.3 erhält man, dass für die Nutzenfunktion U, die die Inada Bedingung erfüllt, die konjugierte Funktion V nur endliche Werte annehmen kann. Das heißt, dass das Maximierungsproblem in (6) und damit auch in (5) eine Lösung besitzt.

Somit erhalten wir mit Hilfe von (4) und (7) folgende Gleichung für Ψ:

$$\begin{aligned}
\Psi(y) &= \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y) \\
&= \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + yx \\
&= \sum_{n=1}^{N} p_n \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N} \left(U(\xi_n) - y\frac{q_n}{p_n}\xi_n \right) + yx \\
&= \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n} \right) + yx \\
&= \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP} \right) + yx.
\end{aligned}$$

Sei nun eine Funktion $v(y)$ definiert durch:

$$v(y) := \mathbb{E}_P V\left(y\frac{dQ}{dP} \right) = \sum_{n=1}^{N} p_n V\left(y\frac{q_n}{p_n} \right), \quad y > 0.$$

Die Funktion v besitzt die gleichen qualitativen Eigenschaften aus dem Satz 2.3 wie die Funktion V , da v eine konvexe Kombination von V ausgewertet auf linear skalierten Werten ist.
Somit ist die Funktion $\Psi(y) = v(y) + yx$ konvex.
Ψ besitzt also ein globales Minimum an der Stelle $\hat{y}$, wenn gilt:
$\Psi'(\hat{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(\hat{y}) + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'(\hat{y}) = -x.$
v' ist stetig und strikt monoton steigend und es gilt:
$\lim_{y \searrow 0} v'(y) = -\infty, \qquad \lim_{y \to \infty} v'(y) = 0$
Somit ist $v' : (0, \infty) \to (-\infty, 0)$ bijekiv. Das heißt, dass für jedes $x > 0$ genau ein $\hat{y}(x) \in (0, \infty)$ existiert mit $v'(\hat{y}(x)) = -x$.
Somit ist $\hat{y}(x)$ der eindeutige Minimierer von

$$\inf_{y>0} \Psi(y) = \inf_{y>0} \left(\mathbb{E}_P V \left(y \frac{dQ}{dP} \right) + yx \right).$$

Nun halten wir $\hat{y}(x)$ fest und betrachten die strikt konkave Funktion

$$\begin{aligned}(\xi_1, \ldots, \xi_N) \mapsto\, & L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \hat{y}(x)) \\ & = \sum_{n=1}^{N} p_n \left(U(\xi_n) - \hat{y}(x) \frac{q_n}{p_n} \xi_n \right) + \hat{y}(x)x\end{aligned}$$

Analog zu oben kann man sich überlegen, dass ein eindeutiger Maximierer $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N)$ dieser Funktion existiert und es gilt

$$U'(\hat{\xi}_n) = \hat{y}(x) \frac{q_n}{p_n} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\xi}_n = -V' \left(\hat{y}(x) \frac{q_n}{p_n} \right).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\inf_{y>0} \Psi(y) &= \inf_{y>0} (v(y) + xy) \\ &= v(\hat{y}(x)) + x\hat{y}(x) \\ &= L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)).\end{aligned} \tag{8}$$

L ist stetig differenzierbar an der Stelle $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x))$, da $\hat{\xi}_n \in \{U > -\infty\}$ für alle $1 \leq n \leq N$. Somit ist $\nabla L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) = 0$.

Insbesondere ist $\partial_y L(\xi_1, \ldots, \xi_N, y)|_{(\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_N,\hat{y}(x))} = 0$. Es folgt dann aus der Formulierung

$$L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) - \hat{y}(x) \left(\sum_{n=1}^{N} q_n \hat{\xi}_n - x \right) \text{ für } \hat{y}(x) > 0$$

dass die Nebenbedingung (3) erfüllt ist, d.h

$$\sum_{n=1}^{N} q_n \hat{\xi}_n = x.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) = L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) \tag{9}$$

Wir erhalten also

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n). \tag{10}$$

Denn $u(x) \geq \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n)$ folgt aus

$$u(x) = \sup_{\xi_1,\ldots,\xi_N,\ \sum_{n=1}^{N} q_n \xi_n \leq x} \sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \geq \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n),$$

da für $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N)$ die Nebenbedingung erfüllt ist.
$u(x) \leq \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n)$ erhält man aus der Tatsache, dass für alle $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, die die Nebenbedingung erfüllen, gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} p_n U(\xi_n) \leq L(\xi_1, \ldots, \xi_N, \hat{y}(x)) \leq L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n).$$

Mithilfe von (10),(9) und (8) erhalten wir für $x \in \{U > -\infty\}$

$$\begin{aligned} \inf_{y>0} \Psi(y) &= \inf_{y>0} (v(y) + xy) = L(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_N, \hat{y}(x)) \\ &= \sum_{n=1}^{N} p_n U(\hat{\xi}_n) = u(x). \end{aligned}$$

Aus der Bemerkung 2.4 und der Tatsache, dass v die gleichen qualitative Eigenschaften wie V in 2.3 besitzt, folgt nun:

v ist die konjugierte Funktion von u und

u erfüllt die Inada Bedingung und ist somit selbst eine Nutzenfunktion.

Somit können wir $\hat{y}(x)$, definiert durch $v'(\hat{y}(x)) = -x$, berechnen durch

$$\hat{y}(x) = u'(x), \text{ für } x \in \{U > -\infty\}.$$

Nun wollen wir unsere Ergebnisse in einem Satz zusammenfassen.

Wir bezeichnen mit $\hat{X}_T \in C(x)$ den Optimierer $\hat{X}_T(\omega_n) = \hat{\xi}_n$ für $n = 1, \ldots, N$.

Satz 2.5 *Gegeben sei ein diskretes, arbitragefreies und vollständiges Finanzmarktmodell mit einem abdiskontierten Preisprozess $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, wobei $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist. Sei Q das äquivatente Martingalmaß und U eine Nutzenfunktion mit Inada Bedingung.*

Seien $u(x)$ und $v(x)$ definiert durch

$$u(x) = \sup_{X_T \in C(x)} \mathbb{E}_P U(X_T), \quad x \in \{U > -\infty\}, \tag{11}$$
$$v(y) = \mathbb{E}_P V\left(y \frac{dQ}{dP}\right), \quad y > 0.$$

Dann gilt:

1. *Die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ sind konjugiert, und u besitzt die gleichen Eigenschaften wie U.*

2. *Der Optimierer $\hat{X}_T$ von (11) existiert und ist eindeutig. Es gilt*

$$\hat{X}_T = -V'\left(y \frac{dQ}{dP}\right) \quad \text{oder auch} \quad y \frac{dQ}{dP} = U'(\hat{X}_T), \tag{12}$$

wobei $x \in \{U > -\infty\}$, $y > 0$ und

$$y = u'(x) \;\; \text{bzw.} \;\; x = -v'(y).$$

Mithilfe dieses Satzes ist es nun möglich den Optimierer $\hat{X}_T$ zu bestimmen. Da der Markt vollständig ist, existiert ein Hedge für $\hat{X}_T$, damit ist dann auch die

optimale Handelsstrategie festgelegt.
Wir wollen nun die oben entwickelte Methode anwenden und die optimale Handelsstrategie für ein Anfangskapital x in einem Einperioden CRR-Modell bestimmen.

3 Anwendung in einem Einperioden CRR-Modell

Wir betrachten nun ein arbitragefreies Einperioden CRR-Modell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$ und $P(\omega_2) = \frac{1}{2}$.
$\hat{S}_0^0$=1 ist der Preis der festverzinslichen Anleihe zum Zeitpunkt 0 und $\hat{S}_1^0 = 1 + r$ der Preis zum Zeitpunkt 1 für ein $r > -1$. Für die risikobehaftete Anleihe gilt:

$$\hat{S}_0^1 = 1, \quad \hat{S}_1^1 = \begin{cases} 1 + u, \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ 1 + d, \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt.} \end{cases}$$

Da das Modell arbitragefrei ist, gilt $d < r < u$. Ferner soll $d > -1$ sein.
Für die abdiskontierte Preisentwicklung gilt:

$$S_0^0 = 1, \quad S_1^0 = 1$$
$$S_1^0 = 1, \quad S_1^1 = \begin{cases} 1 + \tilde{u}, \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt} \\ 1 + \tilde{d}, \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt,} \end{cases}$$

mit $1 + \tilde{u} = \frac{1+u}{1+r} > 1$ und $1 + \tilde{d} = \frac{1+d}{1+r} < 1$.
Wir nehmen o.B.d.A an, dass $\tilde{u} \geq -\tilde{d}$. Denn dann gilt $\mathbb{E}_P S_1^1 \geq S_0^1$, d.h. die optimale Handelsstrategie wird eine long-Position in der Aktie haben. Für $\tilde{u} < -\tilde{d}$ könnten wir die unteren Berechnungen analog durchführen, nur dann hätten wir eine short-Position in der Aktie.
Für den äquivalenten Martingalmaß Q gilt

$$Q(\omega_1) = q = \frac{r-d}{u-d} = \frac{-\tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}} \text{ und entsprechend } Q(\omega_2) = 1 - q = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u} - \tilde{d}}.$$

Sei $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\},\ x > 0$ eine Nutzenfunktion mit der konjugierten Funktion $V(y) = -\frac{y^\beta}{\beta}$ mit $\alpha - 1 = (\beta - 1)^{-1}$ (siehe Beispiel 2).
Nun wollen wir das Optimierungsproblem für die Nutzenfunktion U mithilfe der oberen Methode lösen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
v(y) &= \mathbb{E}_p V\left(y\frac{dQ}{dP}\right) \\
&= \frac{1}{2}V(y2q) + \frac{1}{2}V(y2(1-q)) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{y^\beta(2q)^\beta}{\beta} - \frac{y^\beta(2(1-q))^\beta}{\beta}\right) \\
&= c_V V(y), \quad \text{mit } c_V = \frac{1}{2}\left((2q)^\beta + (2(1-q))^\beta\right)
\end{aligned}$$

Um $u(x)$ auszurechnen benutzen wir folgende Bemerkung:

Bemerkung 3.1 Sei $V(y)$ die konjugierte Funktion von $U(x)$ und $c > 0$ eine Konstante. Dann ist die Funktion $cV(y)$ die Konjugierte von $cU\left(\frac{x}{c}\right)$.
Dies kann man leicht zeigen.

Beweis: Setze $\tilde{U}(x) = cU\left(\frac{x}{c}\right)$. Das heißt es ist zu zeigen, dass
$cV(y) = sup_x(\tilde{U}(x) - yx)$.
Setze $\tilde{x} = \frac{x}{c}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sup_x(\tilde{U}(x) - yx) &= \sup_{\tilde{x}}(cU(\tilde{x}) - cy\tilde{x}) \\
&= c \cdot \sup_{\tilde{x}}(U(\tilde{x}) - y\tilde{x}) = cV(y).
\end{aligned}$$

□

Da V die konjugierte Funktion von U ist, ist $v(x) = c_V V(y)$ die konjugierte Funktion von

$$\begin{aligned}
u(x) = c_V U\left(\frac{x}{c_V}\right) &= c_V^{1-\alpha}U(x) = c_U U(x), \text{ mit} \\
c_U = c_V^{1-\alpha} &= \left(\frac{1}{2}\left((2q)^\beta + (2(1-q))^\beta\right)\right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Für ein $x > 0$ können wir nun zuerst $\hat{y}(x)$ ausrechnen: $\hat{y}(x) = u'(x) = c_U U'(x)$. Somit gilt dann:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1(x) &= -V'\left(\hat{y}(x)\frac{dQ}{dP}\right) \\
&= -V'(U'(x))c_U^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, && \text{da } V'(y) = -y^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
&= xc_V^{-1}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, && \text{da } -V' = (U')^{-1}
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\hat{X}_1(x) = \begin{cases} xc_V^{-1}\left(\frac{-2\tilde{d}}{\tilde{u}-\tilde{d}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = xc_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}}, & \text{falls } \omega_1 \text{ eintritt,} \\ xc_V^{-1}\left(\frac{2\tilde{u}}{\tilde{u}-\tilde{d}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = xc_V^{-1}(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}, & \text{falls } \omega_2 \text{ eintritt} \end{cases}$$

Nun zeigen wir, dass tatsächlich

$$\hat{X}_1(x) = x + \hat{h}\triangle S_1^1, \text{ für ein } \hat{h} \in \mathbb{R} \text{ gilt.} \tag{13}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q\hat{X}_1(x) &= x\frac{\left(q(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} + (1-q)(2(1-q))^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)}{\left(\frac{1}{2}((2q)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + (2(1-q))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}})\right)} \\
&= x = \mathbb{E}_Q(x + \hat{h}\triangle S_1^1),
\end{aligned}$$

da S ein Martingal bezüglich Q ist. Somit ist (13) gezeigt.

Jetzt können wir (13) benutzen um $\hat{h}$ auszurechnen. Falls ω_1 eintritt, gilt:

$$\begin{aligned}
& x + \hat{h}\tilde{u} = xc_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
\Rightarrow \quad & \hat{h} = x\left(c_V^{-1}(2q)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1\right)\tilde{u}^{-1} = \hat{k}x.
\end{aligned}$$

Das heißt, dass um maximalen erwarteten Nutzen zu erreichen, muss man $\hat{k}x$ in die Aktie investieren. Dabei kann $\hat{k}$ in Abhängigkeit von u und α genau berechnet werden und es gilt $0 < \hat{k} < \infty$ für $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$. Man beachte, dass $\hat{k}$ größer als 1 sein kann, d.h. man muss short-Position in der risikolosen Anleihe annehmen.