Die Bewertung von amerikanischen Basketoptionen

Seminararbeit von Henning Katerkamp

20. April 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Eine Basketoption ist ein Finanzderivat, genauer eine exotische Option, deren underlying eine (gewichtete) Summe von Finanzgütern ist. Dies kann beispielsweise ein Aktienindex oder ein Portfolie sein. Genau wie bei Plain Vanilla Optionen meint der Zusatz amerikanisch, dass die Basketoption zu jedem Zeitpunkt t der Gesamtlaufzeit T ausgeübt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der Perpetual Put im eindimensionalen Black-Scholes Modell betrachtet und mit Hilfe einer von M. Beibel und H.R. Lerche entwickelten Methode berwertet.

Im zweiten Teil wird der Perpetual Put im zweidimensionalen Modell auf die Summe von 2 Aktien betrachtet und die Beibel-Lerche Methode benutzt, um eine Approximation der sogenannten early-exercise region zu erhalten.

2 Bewertung des Perpetual Put mit der sogenannten Beibel/Lerche - Methode

2.1 Beibel/Lerche - Methode

Sei $(\Omega, (\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Sei $Z = (Z_t; 0 \leq t < \infty)$ ein stetiger stochastischer Prozess.

Wir wollen $\mathbb{E}(Z_T)$ über alle Stoppzeiten T mit $P(T < \infty) = 1$ maximieren.

Die Idee ist nun, einen anderen, zu $\mathbb{F}_t$ adaptierten, stetigen stochastischen Prozess Y, eine Funktion g mit eindeutigem Maximum in einem Punkt y^* sowie ein postitives Martingal M mit $M_0 = 1$ zu finden, so dass gilt $Z_t = g(Y_t)M_t$ für $0 \leq t < \infty$. Also gilt nach Wahl von y^*: $Z_t \leq g(y^*)M_t$.

Da es sich bei M um ein positives Martingal handelt, erhält man für jede Stoppzeit T mit $P(T < \infty)$:

$$\mathbb{E}(Z_T) \leq g(y^*)$$

Um nun zu zeigen, dass $T^* = \inf\,(t > 0 | Y_t = y^*)$ eine optimale Stoppzeit ist, muss bewiesen werden, dass $P(T^* < \infty) = 1$ sowie $\mathbb{E}(M_{T^*}\mathbb{1}_{\{T^*<\infty\}}) = M_0 = 1$.

Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{T^*}\mathbb{1}_{\{T^*<\infty\}}) &= \mathbb{E}(g(Y_{T^*})M_{T^*}\mathbb{1}_{\{T^*<\infty\}}) \\ &= g(y^*)\mathbb{E}(M_{T^*}\mathbb{1}_{\{T^*<\infty\}}) \\ &= g(y^*)\end{aligned}$$

Das Problem lässt sich folgendermaßen umformulieren:

Definiere durch Q das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{F}_\infty = \sigma(\mathbb{F}_t; t \geq 0)$ mit

$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathbb{F}_t} = M_t$ für $0 \leq t < \infty$

Dann gilt für alle Stoppzeiten T mit $P(T < \infty) = 1$:

$\mathbb{E}(Z_T) = \mathbb{E}_Q(g(Y_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}})$.

$\mathbb{E}(M_{T^*}\mathbb{1}_{\{T^*<\infty\}}) = 1$ zu zeigen, muss man nun also $Q(T^* < \infty) = 1$ zeigen.

2.2 Perpetual Put

Diese Methode kann man nun anwenden, um die sogenannte early exercise region des Perpetual Puts auf eine Aktie zu bestimmen.

Sei $S(t)$ ein Preisprozess, so dass gilt

$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW(t))$, wobei $\sigma > 0, r > 0$ und W ein Wiener- Prozess ist, für den Preisprozess gilt also

$S(t) = S_0 exp(\sigma W(t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t)$.

Sei $\mathbb{S}$ die Menge aller Stoppzeiten. Der Perpetual Put auf die Aktie mit dem gegebenen Preisprozess ist ein amerikanischer Put mit unendlicher Laufzeit. Den fairen Preis dieses Puts definieren wir also durch

$v_a(x) = sup_{\tau \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_{\mathbb{x}} e^{-r\tau}(K - aS(\tau))^+$ für alle $x \in (0, \infty)$.

Wir suchen eine Grenze für die sogenannte early exercise region:

$E_a := \{x \in (0, \infty) : v_a(x) = (K - ax)^+\}$

Also liegt der Anfangspreis x einer Aktie in der early exercise region, wenn der Preis des Puts mit dem Payoff bei sofortiger Ausübung der Option übereinstimmt. Daher ist der erste Eintritt in die early exercise region eine optimale Ausübungsstrategie.

Mit $C_a := \{x \in (0, \infty) : v_a(x) > (K - ax)^+\}$ bezeichnet man die continuation region.

2.3 Bewertung des Perpetual Put

Für den Preis des Perpetual Put gilt

$v_1(x) = sup_{\tau\in\mathbb{S}}\mathbb{E}_{\mathbb{x}}e^{-r\tau}(K - S(\tau))^+$

$\quad\quad\quad = sup_{\tau\in\mathbb{S}}\mathbb{E}_{\mathbb{x}}e^{-r\tau}(K - S(\tau))^+\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}},$

wir suchen also eine Stoppzeit T von $\mathbb{S}$, die $\mathbb{E}_{\mathbb{x}}e^{-rT}(K - S(T))^+\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ maximiert.

Setze zunächst $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}$ sowie $f(x) = (K - x)^+x^\alpha$.

Sei $C^* = max_{0<x\leq K}\{(K - x)^+x^\alpha\}$. Bezeichne mit x^* den eindeutig bestimmten Wert in $(0, K]$, in dem die Funktion ein Maximum besitzt.

Es gilt $f(x)\Big|_{(0,K]} = (K - x)x^\alpha$ sowie

$f'(x^*)\Big|_{(0,K]} = \alpha K(x^*)^{\alpha+1} - (\alpha + 1)(x^*)^\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha K - (\alpha + 1)x^* = 0$

$\Leftrightarrow x^* = \frac{\alpha}{\alpha+1}K$

Einsetzen in f liefert:

$$C^* = (K\tfrac{\alpha}{\alpha+1})^\alpha(K - K\tfrac{\alpha}{\alpha+1})$$

Theorem 3.3.1

Sei $r > 0$ und $K \leq 1 + \frac{1}{\alpha}$, d.h. $K\frac{\alpha}{\alpha+1} \leq 1$

Dann gilt

$sup_{\tau\in\mathbb{S}}\mathbb{E}_{\mathbb{x}}e^{-r\tau}(K - S(\tau))^+\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} = \mathbb{E}_{\mathbb{x}}e^{-rT^*}(K - S(T^*))^+\mathbb{1}_{\{T^*<\infty\}} = C^*$ für

$T^* = inf\{t > 0|S(t) = x^*\}$.

Beweis:

Definiere $M_\alpha(t) := e^{-rt}S(t)^{-\alpha}S(0)^\alpha$. Dann gilt:

$M_\alpha(t) = e^{-rt}S(t)^{-\alpha}S(0)^\alpha$

$\quad = e^{-rt}e^{-\alpha\sigma W(t)-\alpha(r-\frac{\sigma^2}{2})t}$

$\quad = e^{-\alpha\sigma W(t)-(\alpha r-\frac{\alpha\sigma^2}{2}+r)t}$

$\quad = e^{-\frac{2r}{\sigma}W(t)-(\frac{2r^2}{\sigma^2})t} \qquad [\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}]$

$= e^{-\alpha\sigma W(t) - (\frac{(\alpha\sigma)^2}{2})t}$,

d.h. $M_\alpha(t)$ ist ein positives Martingal mit $M_\alpha(0) = 1$

Nach Wahl von C^* gilt nun für alle $0 \leq t < \infty$

$e^{-rt}(K - S(t)^+ = \frac{e^{-rt}(S(t))^{-\alpha} S(0)^\alpha (K - S(t))^+ (S(t))^\alpha}{S(0)^\alpha}$

$= M_\alpha(t) f(S(t)) S(0)^{-\alpha}$

$\leq \frac{C^*}{S(0)^{-\alpha}} M(t)$

Also gilt für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathbb{S}$, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{x}} e^{-r\tau}(K - S(\tau))^+ \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}} \leq \frac{C^*}{S(0)^{-\alpha}}$,

denn mit dem Lemma von Fatou folgt

$\mathbb{E}_{\mathbb{x}}(M_\alpha(\tau)) = \mathbb{E}_{\mathbb{x}}(\lim_{n\to\infty} M_\alpha(\tau \wedge n)) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{x}}(M_\alpha(\tau \wedge n)) = 1.$

Für T^* gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{x}} e^{-rT^*}(K - S(T^*))^+ \mathbb{1}_{\{T^* < \infty\}} = \frac{C^*}{S(0)^{-\alpha}} \mathbb{E}_{\mathbb{x}}(M(T^*) \mathbb{1}_{\{T^* < \infty\}})$$

Es gilt nämlich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M_\alpha(T^* \wedge n) \leq (K \tfrac{\alpha}{1+\alpha})^{-\alpha}.$$

Anwendung des Satzen von der majorisierten Konvergenz liefert dann:

$$\mathbb{E}_x(M_\alpha(T^*)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x(M_\alpha(T^* \wedge n)) = 1.$$

Die early exercise region ist also gegeben durch $E_1 = (0, K \frac{\alpha}{1+\alpha}]$ und es gilt:

$v_1(x) = x^{-\alpha}(K \frac{\alpha}{1+\alpha})^\alpha (K - K \frac{\alpha}{1+\alpha})$,falls $x \geq K \frac{\alpha}{1+\alpha}$,

$v_1(x) = K - x$ sonst.

3 Der Perpetual Put auf die Summe von zwei Aktien

Nun betrachten wir den Perpetual Put auf die (gewichtete) Summe von zwei Aktien. Sei dazu

$$S(t) = (S_1(t), S_2(t))\ , t \geq \infty$$

der Preisprozess zweier Aktien, für die gilt

$$dS_1(t) = S_1(t)(rdt + \sigma_1 dW_1(t))$$
$$dS_2(t) = S_2(t)(rdt + \sigma_2 dW_2(t))$$

Dabei bezeichnet $r > 0$ die Zinsrate sowie σ_1,$\sigma_2 > 0$ die jeweilige Volatilität der zu Grunde liegenden Aktie.

W_1 und W_2 sind abhängige Wiener-Prozesse mit quadratischer Kovariation $[W_1, W_2]_t = \rho t$. Die Filtration des zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, (\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ wird von den Wiener-Prozessen erzeugt. Nach eventueller Girsanov-Transformation kann man annehmen, dass P ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dass also die abdiskontierten Preisprozesse Martingal bezüglich P sind.

Sei $a = (a_1, a_2) \in (0, \infty)^2$. Ein Index I_a von 2 Aktien ist dann definiert als

$$I_a(t) = a_1 S_1(t) + a_2 S_2(t) = aS(t) \qquad\qquad t \geq 0$$

Wir wollen nun einen Put auf diesen Index betrachten mit strike K, also eine Option mit Auszahlung $(K - aS(t))^+$.

Wenn man annehmen könnte, dass der Index einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen würde, so würde sich dieses Problem auf ein eindimensionales Black-Scholes-Modell zurückführen lassen.

Allerdings kann gezeigt werden, dass sich die gewichtete Summe zwei geom. Brownscher Bewegungen nicht wieder wie eine geom. Brownsche Bewegung verhält.

Sei also $P_x = P(\cdot|S(0) = x)$ für alle $x \in (0, \infty)^2$.

Dann ist der faire Preis des Amerikanischen Puts mit Laufzeit T gegeben durch

$$v_a(x,T) = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}_x e^{-r\tau}(K - aS(\tau))^+$$

Die Bestimmung der early-exercise-Strategie ist dabei ein Problem des optimalen Stoppens.

Da der Preis amerikanischer Put-Optionen bereits im eindimensionalen Black-Scholes-Modell nur numerisch bestimmt werden kann, bietet es sich an, zunächst den Perpetual Put auf den Index zu bewerten, um dadurch Rückschlüsse auf den Preis des Puts mit endlicher Laufzeit schließen zu können.

Sei also $\mathbb{S}$ die Menge aller Stoppzeiten und

$$v_a(x) = \sup_{\tau \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_x e^{-r\tau}(K - aS(\tau))^+ = \sup_{\tau \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_x e^{-r\tau}(K - aS(\tau))^+ \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}$$

der Preis des Perpetual Put mit srike K, anfänglichem Aktienkurs $x = (x_1, x_2) \in (0,\infty)^2$ und Gewichtsvektor $a = (a_1, a_2) \in (0,\infty)^2$.

Wir geben nun eine innere Approximation der early exercise region

$$E_a = \{x \in (0,\infty)^2 : v_a(x) = (K - ax)^+\}$$

Im weiteren Verlauf wollen wir für $x, y \in (0,\infty)^2$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}^2$ folgende Notationen verwenden:

$$xy = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$
$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$
$$\mathbf{1} = (1,1)$$
$$T_a = \{x \in (0,\infty)^2 : K - ax > 0\}$$
$$|x| = x_1 + x_2$$

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie wissen wir, dass $(\frac{S_1(t)}{x_1}, \frac{S_2(t)}{x_2})_{t \geq 0}$ die gleiche Verteilung bezüglich P_x besitzt wie $(S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ bzgl. $P_{\mathbf{1}}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_a(x) &= \sup_{\tau \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_x e^{-r\tau}(K - aS(\tau))^+ \\ &= \sup_{\tau \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}(K - axS(\tau))^+ \\ &= v_a x(\mathbf{1}) \qquad\qquad a, x \in (0,\infty)^2 \end{aligned}$$

Definition

Eine Teilmenge $M \subset (0,\infty)^2$ heißt süd-west-verbunden, wenn aus $y \in M$ folgt $x \in M$ für alle $x \leq y$.

Theorem

Die early exercise region E_a ist eine beschränkte, konvexe, süd-west-verbundene Teilmenge von T_a. Außerdem ist $E_a = \{(\frac{1}{a_1}x_1, \frac{1}{a_2}x_2) : x \in E_{\mathbf{1}}\}$ das Bild einer linearen Transformation von $E_{\mathbf{1}}$.

Beweis:

Da wir außerhalb von E_a die Option nicht ausüben, dort also eine Auszahlung von Null haben, gilt $E_a \subset T_a$. Aus der Theorie optimalen Stoppens folgt, dass E_a abgeschlossen ist in $(0,\infty)^2$. Wegen $v_a(x) = v_{ax}(\mathbf{1}) = v_{\mathbf{1}}(ax)$ ist E_a das Bild einer linearen Transformation von $E_{\mathbf{1}}$.

Die süd-west-Verbundenheit zeigen wir folgendermaßen:

Sei $y \in E_a, x \leq y$. Für eine Stoppzeit τ gilt dann

$\mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}(K-(ax)S(\tau))^+$

$= \mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}((K-(ax)S(\tau))^+ - (K-(ay)S(\tau))^+ + (K-(ay)S(\tau))^+)$

$= \mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}((K-(ax)S(\tau))^+ - (K-(ay)S(\tau))^+) + \mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}(K-(ay)S(\tau))^+$

$\leq \mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}((K-(ax)S(\tau))^+ - (K-(ay)S(\tau))^+) + v_{ay}(\mathbf{1})$

$\leq \mathbb{E}_{\mathbf{1}} e^{-r\tau}((ay-ax)S(\tau))^+ \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} + v_a(y)$ da $z_1^+ - z_2^+ \leq (z_1 - z_2)^+$

$= (ay-ax)\mathbb{E}_{\mathbf{1}}(e^{-r\tau}S(\tau))\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} + v_a(y)$

$\leq (ay-ax)\mathbf{1} + K - ay$

$= K - ax$ da $(e^{-rt}S_i(t))_{t\geq 0}$ ein positives Martingal ist.

Also ist E_a süd-west-verbunden.

Da v_a als Supremum konvexer Funktionen wieder konvex ist, folgt

$v_a(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda v_a(x) + (1-\lambda)v_a(y)$

$= \lambda(K - ax) + (1-\lambda)(K - ay)$

$= K - a(\lambda x + (1-\lambda)y)$

für alle $\lambda \in (0,1), x, y \in E_a$, also die Konvexität von E_a.

Betrachtet man den Perpetual Put auf eine der Aktien, so liefert dieser mit

$$x^{(1)} = (\frac{K}{a_1}\frac{\beta_1}{1+\beta_1}, 0) \qquad \beta_1 = \frac{2r}{\sigma_1^2}$$
$$x^{(2)} = (0, \frac{K}{a_2}\frac{\beta_2}{1+\beta_2}) \qquad \beta_2 = \frac{2r}{\sigma_2^2}$$

Punkte, deren Verbindung in der early exercise region E_a enthalten ist. Auf Grund der süd-west-Verbundenheit sind auch alle postiven, im Koordinatensystem süd-westlich gelegenen Punkte enthalten in E_a. Es folgt also:

$G = \{x \in (0,\infty)^2 : x \leq y$ für ein $y \in \{\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} | 0 \leq \lambda \leq 1\}\} \subset E_a$.

Dieses Ergebnis wollen wir nun mit Hilfe der Beibel/Lerche-Methode verbessern. Dazu müssen wir ein positives Martingal konstruieren.

Lemma

Sei $p(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1+1)\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2+1)\sigma_2^2 + \alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2 - r(\alpha_1+\alpha_2) - r$.

Dann definiert $M_\alpha(t) = e^{-rt}S(t)^{-\alpha}, t \geq 0$ ein positives Martingal, falls $p(\alpha) = 0$.

Beweis: Mit Hilfe der mehrdimensionalen Itô-Formel folgt:

(i) Beh.: $d(S(t)^{-\alpha} = S(t)^{-\alpha}((p(\alpha)+r)dt - \sum_{i=1}^{2}\sigma_i\alpha_i dW_i(t))$

(i) Bew.: Die mehrdimensionale Formel von Itô besagt unter anderem:

Es seien $M_i(t)$, $i = 1, ..., m$ stetige lokale Martingale und $t \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ stetig mit stetigen partiellen Ableitungen

$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, ..., m, \frac{\partial f}{\partial t}$. Dann gilt für $f(M_1, ..., M_m, t)$:

$df = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}M_iM_j\frac{\partial^2 f}{\partial M_i \partial M_j})dt + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial M_i}dM_i$ Dies wenden wir auf die Funktion $f(x_1, x_2, t) = x_1^{-\alpha_1}x_2^{-\alpha_2}$ an. Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\alpha_1 x_1^{-\alpha_1-1}x_2^{-\alpha_2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\alpha_2 x_2^{-\alpha_2-1}x_1^{-\alpha_1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \alpha_1\alpha_2 x_1^{-\alpha_1-1}x_2^{-\alpha_2-1}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} = \alpha_1(\alpha_1+1)x_1^{-\alpha_1-2}x_2^{-\alpha_2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} = \alpha_2(\alpha_2+1)x_2^{-\alpha_2-2}x_1^{-\alpha_1}$$

Also folgt für $S(t)^{-\alpha} = S_1(t)^{-\alpha_1}S_2(t)^{-\alpha_2} = f(S_1(t), S_2(t), t)$:

$$\begin{aligned}
d(S(t)^{-\alpha} = (&\tfrac{1}{2}\sigma_1^2 S_1(t)^2(\alpha_1(\alpha_1+1))S_1(t)^{-\alpha_1-2}S_2(t)^{-\alpha_2}\\
&+\tfrac{1}{2}\sigma_2^2 S_2(t)^2(\alpha_2(\alpha_2+1))S_2(t)^{-\alpha_2-2}S_1(t)^{-\alpha_1}\\
&+\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2\rho S_1(t)S_2(t)S_1(t)^{-\alpha_1-1}S_2(t)^{-\alpha_2-1})dt\\
&-\alpha_1 S_1(t)^{-\alpha_1-1}S_2(t)^{-\alpha_2}dS_1(t)\\
&-\alpha_2 S_2(t)^{-\alpha_2-1}S_1(t)^{-\alpha_1}dS_2(t)\\
=\ &(S(t))^{-\alpha}(\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^2 \sigma_i^2\alpha_i(\alpha_i+1) + \alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2\rho)dt\\
&+(S(t))^{-\alpha}(\textstyle\sum_{i=1}^2(-\alpha_i r dt - \alpha_i\sigma_i dW_i(t)))\\
=\ &S(t)^{-\alpha}((p(\alpha)+r)dt - \textstyle\sum_{i=1}^2 \sigma_i\alpha_i dW_i(t))
\end{aligned}$$

Sei $N(t) = \sum_{i=1}^2 \int_0^t \sigma_i\alpha_i dW_i(a)$. Dann ist $X_\alpha(t) = e^{-(p(\alpha)+r)t}S(t)^{-\alpha}$ ein lokales Martingal, da $dX_\alpha(t) = X_\alpha(t)dN(t), X_\alpha(0) = x^{-\alpha}, \quad P_x$.

Also ist $X_\alpha(t)$ ein lokales Exponentialmartingal bezüglich N , welches sich schreiben lässt als

$$X_\alpha(t) = x^{-\alpha}exp(N(t) - \tfrac{1}{2}[N]_t) \qquad t \geq 0$$

Mit Novikovs Kriterium folgt die Martingaleigenschaft, da $[N]_t$ proportional zu t ist.
Wegen $M_\alpha(t) = e^{p(\alpha)t}X_\alpha(t)$ folgt die Behauptung.

Mit Hilfe des Martingals gilt:

$e^{-rt}(K - (S_1(t) + S_2(t)))^+$

$= e^{-rt}S(t)^{-\alpha}S(t)^{\alpha}(K - (S_1(t) + S_2(t)))^+$

$= M_\alpha(t)g_\alpha(S(t))$

mit $g_\alpha(x) = x^\alpha(K - (x_1 + x_2))^+$.

Dies liefert eine obere Grenze für den Preis:

Lemma

Sei $\alpha \in (0,\infty)^2$. Dann hat $g_\alpha(x) = x^\alpha(K-(x_1+x_2))^+$ in $(0,\infty)^2$ ein eind. bestimmtes Maximum bei $m_\alpha = K\frac{\alpha}{1+|\alpha|}$.

Beweis:

Sei $0 < s < K$, $D_s = \{x \in (0,\infty)^2 : x_1 + x_2 = s\}$.

Maximieren von x^α über D_s mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens zur Lösung von beschränkten Maximimierungsproblemen mit Nebenbedingung liefert ein eind. Maximum bei $s\frac{\alpha}{|\alpha|}$. Also müssen wir $g_\alpha(s\frac{\alpha}{|\alpha|})$ auf $0 < s < K$ maximieren. Das liefert $s^* = K\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}$ als Maximum.

$\Rightarrow m_\alpha = K\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}\frac{\alpha}{|\alpha|} = K\frac{\alpha}{1+|\alpha|}$.

Wir führen folgende Transformationen ein:

$$\psi : (0,\infty)^2 \to T_{\mathbf{1}}$$
$$\psi(\alpha) = K\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

mit Umkehrfunktion

$$\phi : T_{\mathbf{1}} \to (0,\infty)^2$$
$$\phi(x) = \frac{1}{K}\frac{1}{1-|x|}x$$

Definiere $\beta^{(i)}$ durch

$$\beta^{(1)} = (\frac{2r}{\sigma_1^2}, 0)$$
$$\beta^{(2)} = (0, \frac{2r}{\sigma_2^2})$$

und die Menge Γ durch

$$\Gamma = \{\alpha \in (0,\infty)^2 : \alpha \le \beta \text{ für ein } \beta \in \{\lambda\beta^{(1)} + (1-\lambda)\beta^{(2)} | 0 \le \lambda \le 1\}\}$$

Theorem

Sei $a \in (0,\infty)^2$ ein Gewichtsvektor. Dann gelten:

(1) Die Menge

$$E'_a = \{x \in T_a : p(\phi(\tfrac{1}{a_1}x_1, \tfrac{1}{a_2}x_2)) \leq 0\}$$

ist enthalten in der early exercise region E_a.

(2) E'_a ist eine konvexe Menge mit $G \subset E'_a$.

(3) Für den Optionspreis gilt

$$v_a(x) \leq \inf_{\alpha \in \Psi} h_\alpha(ax)$$

mit $h_\alpha(x) = (K\frac{\alpha}{1+|\alpha|})^\alpha (K - K\frac{a}{1+|\alpha|})x^{-\alpha}$, $\Psi = \{\alpha \in (, \infty)^2 : p(\alpha) = 0\}$.

Beweis:

Wegen $v_a(x) = v_{ax}(\mathbf{1}) = v_{\mathbf{1}}(ax)$ können wir $a = \mathbf{1}$ annehmen.

Sei $p(\alpha) = 0$ sowie $M_\alpha)$ und g_α wie vorher bestimmt. Für jede Stoppzeit τ gilt:

$\mathbb{E}_x e^{-r\tau}(K - S_1(\tau) - S_2(\tau))^+$

$= \mathbb{E}_x M_\alpha(\tau) g_\alpha(S(\tau)) \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}$

$\leq sup_{y \in (0,\infty)^2} g_\alpha(y) \mathbb{E}_x M\alpha(\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}$

$\leq g_\alpha(K\frac{\alpha}{1+|\alpha|}x^{-\alpha}$, denn M_α war ja für $p(\alpha) = 0$ ein positives Martingal.

$\Rightarrow v_{\mathbf{1}}(x) \leq h_\alpha(x)$ für alle $x \in (0, \infty)^2$.

Damit folgt (3).

Wir haben also eine Majorante des Payoff gefunden, die diesen bei $K\frac{\alpha}{1+|\alpha|}$ berührt. Daher ist $K\frac{\alpha}{1+|\alpha|}$ in der early exercise region enthalten. DIe Vereinigung dieser Punkte $B = \{K\frac{\alpha}{1+|\alpha|} : \alpha \in (0, \infty)^2 : p(\alpha) = 0\}$ ist das Bild von $\gamma = \alpha \in (0, \infty)^2 : p(\alpha)\}$ unter ψ.

Wegen $p(\beta^{(i)}) = 0, \psi(\beta^{(i)}) = x^{(i)}$ gilt:

$$\Sigma = \{\alpha \in (0, \infty)^2 : p(\alpha) \leq 0\} = \text{conv}(\Psi) \cup \Gamma$$

und

$$E'_1 = \psi(\Sigma) = \text{conv}(B) \cup G.$$

E'_1 ist konvex als Bild von Σ unter der Transformation ψ, d.h. (2) gilt auch.

Die erste Menge der Vereinugung ist enthalten in E_1, da E_1 konvex ist. Die zweite

Menge auf Grund der süd-west-Verbundenheit. Damit folgt (1) und alle Behauptungen sind gezeigt.