Seminar:
Finanzmathematik

Upper und lower Hedging im Mehrperiodenmodell

Anastasia Au
16. Mai 2010

1.Beschreibung des Modells

Der Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus

- einer endlichen Menge Ω mit Ω = { $w_1, w_2, \dots, w_N$}
- einem Wahrscheinlichkeitsmaß P, so dass P(w_n) = p_n> 0, für n = 1,…,N gilt
- einer aufsteigenden Folge $(F_t)_t$ von σ-Algebren auf Ω, mit t = 0,…,T und einer natürlichen Zahl T ≥

2. No-Arbitrage und die Fundamentalsätze der Preistheorie

$\mathcal{H}$ ≙ Menge aller selbstfinanzierenden Handelsstrategien

Anmerkung: L^∞(Ω,F,P), L^1(Ω,F,P), L^0(Ω,F,P) etc., sind isomorph zu R^N.

Definition 2.1. Ein Vektorraum K ⊂ L^0(Ω,F,P) definiert durch K = { $(\mathrm{H} \cdot S)_T$ |H ϵ $\mathcal{H}$ }
bezeichnet die Menge der bedingten Claims, die hedgebar sind zum Preis 0.

Für a ϵ R, ist die Menge der bedingten Claims, die zum Preis a hedgebar sind, definiert durch den affinen Raum K_a= a + K = { $\mathrm{a} + (\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_T$ | H ϵ $\mathcal{H}$, a ϵ R }.

Definition 2.2. Ein konvexer Kegel C ⊂ L^∞(Ω,F,P) definiert durch
C = { g ϵ L^∞(Ω,F,P)|es ex. f ϵ K mit f ≥ g} bezeichnet die Menge der bedingten Claims, die super-replizierbar sind zum Preis 0.

Für a ϵ R, ist die Menge der bedingten Claims, die super-replizierbar sind zum Preis a definiert durch C_a= a + C.

Definition 2.3. Ein Finanzmarkt S genügt den No-Arbitrage Bedingungen (NA), falls
K ∩ L^0_+(Ω,F,P) = {0} gilt oder äquivalent dazu
C ∩ L^0_+(Ω,F,P) = {0}, wobei 0 die Nullfunktion bezeichnet.

Proposition 2.4. Genügt S den (NA), dann ist C ∩ (-C) = K.

Beweis: Dass „K ⊂ C ∩ (-C)“ gilt ist klar.
Sei nun g ϵ C ∩ (-C). Dann ist g = f_1 - h_1 mit f_1ϵ K, h_1ϵ L^∞_+ und g = f_2 + h_2 mit f_2ϵ K, h_2ϵ L^∞_+.
Dann gilt $f_1 - f_2 = h_1 + h_2$ ϵ L^∞_+. Daher ist $f_1 - f_2$ϵ K ∩ L^∞_+ = {0}. Somit folgt $f_1 = f_2$ und $h_1 + h_2$= 0, daher $h_1 = h_2$= 0. Insgesamt ist g = $f_1 = f_2$ϵ K. q.e.d.

Definition 2.5. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω,F) heißt äquivalentes Martingalmaß für S, wenn $Q \sim$ P und S ein Martingal bzgl. Q ist, d.h. falls E[S_{t+1}|F_t] = S_t gilt für t=0,…,T-1.

M^e(S) ≙ die Menge der äquivalenten Martingalmaße
M^a(S) ≙ die Menge aller Martingalmaße. Das a steht für absolut stetig bzgl. P.

Lemma 2.6. Für ein W-Maß Q auf (Ω,F) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $Q \in M^a$(S)
(ii) E_Q[f] = 0 ,für alle f ϵ K
(iii) E_Q[g] ≤ 0, für alle g ϵ C.

Beweis:
(i)→(ii): Zunächst kann festgestellt werden, dass für ein Q-Martingal S und eine vorhersehbare Strategie H_t folgendes gilt:
$E_Q[\, \mathrm{H}_t \Delta S_t \mid F_{t-1}\,] = E_Q[\, \sum_{j=1}^{d} \mathrm{H}_t^j (S_t^j - S_{t-1}^j) \mid F_{t-1}\,]$
$= \sum_{j=1}^{d} \mathrm{H}_t^j\, E_Q[\, S_t^j - S_{t-1}^j \mid F_{t-1}\,] = 0$
Folgendes zeigt, dass $(\mathrm{H} \cdot S)_t$ ein Q-Martingal ist:
$E_Q[\, (\mathrm{H} \cdot S)_t \mid F_{t-1}\,] = E_Q[\, \sum_{s=1}^{j} \mathrm{H}_s\, \Delta S_s + H_t \Delta S_t \mid F_{t-1}\,]$
$= (\mathrm{H} \cdot S)_{t-1}$
Insbesondere ist $E_Q[\, (\mathrm{H} \cdot S)_t\,] = (\mathrm{H} \cdot S)_0$ (da $(\mathrm{H} \cdot S)_t$ ein Martingal ist)
(ii)→(i): Sei A eine beliebige F_{t-1}messbare Menge.
Betrachte die Strategie

$$\mathrm{H}\,(w, s) = 1_A\, 1_{(t-1,t]}\,(s).$$

Dann ist $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_T = 1_A\, (S_t - S_{t-1})$
und (ii) impliziert $E_Q[1_A(S_t - S_{t-1})] = 0$
↔ $E_Q[\, S_t \mid F_{t-1}] = S_{t-1}$
→ S ist ein Q-Martingal.
(iii)→(ii): Ergibt sich mit K ⊂ C.
(ii)→(iii): Gelte (ii): E_Q[f] = 0, für alle f ϵ K. Nun gibt es nach Definition von C für alle g ϵ C, ein f ϵ K mit f ≥ g.
Dann folgt E_Q[g] ≤ E_Q[f] = 0. Somit E_Q[g] ≤ 0. q.e.d.

Theorem 2.7. (1. Fundamentalsatz der Preistheorie)
Für ein Finanzmarktmodell S auf einem endlichen W-Raum (Ω,F,P) sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) S genügt den (NA)
(ii) M^e(S) ≠ ∅.

Korollar 2.8. Genüge S den (NA) und sei f ϵ L^∞(Ω,F,P) ein hedgebarer bedingter Claim.
Sei also f von der Form f = a + $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_T$ (∗) für ein a ϵ R und eine Strategie H.
Dann sind die Konstante a und der Prozess $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_t$ eindeutig bestimmt durch (∗) und erfüllen, für jedes $Q \in M^e$(S), die Gleichungen:

$$a = E_Q[\, f\,] \qquad (1)$$
$$a + (\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_t = E_Q[\, f \mid F_t\,] \text{ für } 0 \leq t \leq T. \qquad (2)$$

Beweis:
Eindeutigkeit der Konstante a ϵ R:
Angenommen es gibt zwei Darstellungen f = $a^1 + (H^1 \cdot S)_T$ und f = $a^2 + (H^2 \cdot S)_T$ mit $a^1 \neq a^2$. O.B.d.A können wir $a^1 > a^2$ annehmen und erhalten somit eine Abitragemöglichkeit durch Verfolgen der Strategie $H^2 - H^1$.
Wir erhalten also $0 < a^1 - a^2 = ((H^2 - H^1) \cdot S)_T$.
Die Handelsstrategie $H^2 - H^1$ führt zu einem strikt positiven Ergebnis in T, im Widerspruch zu den (NA).
Eindeutigkeit des Prozesses H·S:
Angenommen es gibt wieder zwei Darstellungen f = a + $(H^1 \cdot S)_T$ und f = a + $(H^2 \cdot S)_T$. Wobei die Prozesse $(H^1 \cdot S)$ und $(H^2 \cdot S)$ nicht identisch sind. Dann gibt es ein $0 \leq t \leq T$, so dass $(H^1 \cdot S)_t \neq (H^2 \cdot S)_t$ gilt.
Allgemein können wir A := { $(H^1 \cdot S)_t > (H^2 \cdot S)_t$ } als ein nicht leeres F_t messbares Ereignis annehmen. Unter Verwendung von $(H^1 \cdot S)_T = (H^2 \cdot S)_T$, ist die Handelsstrategie
H := $(H^2 - H^1)\, \mathbf{1_A 1}_{]t,T]}$ ein vorhersehbarer Prozess der ein Arbitrage ermöglicht, mit
$(H \cdot S)_T$ = 0 außerhalb von A und
$(H \cdot S)_T = (H^2 \cdot S)_T - (H^2 \cdot S)_t - (H^1 \cdot S)_T + (H^1 \cdot S)_t = (H^1 \cdot S)_t - (H^2 \cdot S)_t > 0$
auf A gilt, im Widerspruch zu den (NA).
Die Gleichungen (1) und (2) ergeben sich aus der Tatsache, dass für jeden vorhersehbaren Prozess H und jedes Q ϵ M^e(S), H·S ein Q-Martingal ist. q.e.d.

Wir bezeichnen mit
cone(M^e(S)) := { αQ | $\alpha \geq 0$ und Q ϵ M^e(S) } und mit
cone(M^a(S)) := { αQ | $\alpha \geq 0$ und Q ϵ M^a(S) }
die Kegel, die erzeugt werden durch die konvexen Mengen M^e(S) und M^a(S).

Definition 2.9. Ein Paar von Vektorräumen (E, F) über einem Körper K, heißt Dualitätspaar, falls eine bilineare Abbildung $<\cdot,\cdot>$: E × F → R ex., so dass $< x, y >$ = 0, für alle x ϵ E, y = 0 impliziert und so dass $< x, y >$ = 0, für alle y ϵ F, x = 0 impliziert.

In unserem endlich dimensionalen Fall, seien E = L^∞(Ω,F,P) = R^N und F = L^1(Ω,F,P) = R^N diese Vektorräume.

Definition2.10. Für ein Paar von Vektorräumen (E, F) ist die Polarmenge von C definiert durch C^0 := { f ϵ L^1(Ω,F,P) | $<$ g , f $> \leq 1$ für alle g ϵ C }.

Ist C ein konvexer Kegel, dann ist die Polarmenge ebenfalls ein konvexer Kegel und die Polarmenge kann auch folgendermaßen definiert werden
C^0 := { f ϵ L^1(Ω,F,P) | $< g, f > \leq 0$ für alle g ϵ C }.

Insbesondere gilt, für C abgeschlossen und konvex mit 0 ϵ C : $(C^0)^0$ = C.

Die folgende Proposition 2.11. gibt Auskunft über den Zusammenhang von cone(M^a(S)) und der Menge C.

Proposition 2.11. Genüge S den (NA). Dann gilt:

1) C^0 = cone(M^a(S)) und
2) M^e(S) ist dicht in M^a(S).

Und damit folgt die Äquivalenz folgender Aussagen für ein g ϵ L^∞(Ω,F,P):

(i) g ϵ C
(ii) E_Q[g] $\leq$ 0, für alle Q ϵ M^a(S)
(iii) E_Q[g] $\leq$ 0, für alle Q ϵ M^e(S).

Beweis:
Zu 1):
„cone(M^a(S)) ⊂ C^0“:
Sei αQ ϵ cone(M^a(S)) mit α > 0 und Q ϵ M^a(S). Dann ist mit Lemma 2.6.
$E_{\alpha Q}$[g] = E_Q[$\frac{d\alpha Q}{dQ}$ g]
= αE_Q[g] $\leq$ 0 für alle g ϵ C.
Also αQ ϵ C^0.
„C^0⊂ cone(M^a(S))“:
Es ist L^∞_-(Ω,F,P) ⊂ C, weil die Elemente aus L^∞_-(Ω,F,P) von 0 ϵ K dominiert werden können. Weiter ist C^0⊂ L^1_+(Ω,F,P). (Angenommen es gilt nicht, so lassen sich zwei Vektoren konstruieren, die jeweils an der i-ten Stelle eine negative Komponente aufweisen. Dann ergibt sich jedoch $<\mathrm{g},\mathrm{f}> \geq 0$ im Widerspruch zur Definition von C^0)
D.h. dass f ϵ C^0 ⊂ L^1_+(Ω,F,P) geschrieben werden kann als f = αQ, für ein $\alpha \geq 0$ und ein W-Maß Q.
Dann ist 0 $\geq$ E_{f}[g] = $E_{\alpha Q}$[g] = E_Q[$\frac{d\alpha Q}{dQ}$ g] = αE_Q[g] für alle g ϵ C.
Was ja mit Lemma 2.6. bedeutet, dass Q ϵ M^a(S) ist und somit αQ cone(M^a(S)) liegt.
Zu 2):
Da S den (NA) genügt, ex. mit 2.7. ein Q^*ϵ M^e(S).
Für alle Q ϵ M^a(S) und $0 < \mu \leq 1$ ist μQ^*+ (1-μ)Q ϵ M^e(S), denn:

$$E_{\mu Q^* + (1-\mu)\mathrm{Q}}[\, S_{t+1} | F_t] = E_Q[S_{t+1} \frac{d(\mu Q^* + (1-\mu)\mathrm{Q})}{dQ} | F_t]$$
$$= E_Q[S_{t+1} (\frac{d\mu Q^*}{dQ} + \frac{d(1-\mu)\mathrm{Q}}{dQ}) | F_t]$$
$$= E_Q[S_{t+1} \frac{d\mu Q^*}{dQ} | F_t] + E_Q[S_{t+1} \frac{d((1-\mu)\mathrm{Q})}{dQ} | F_t]$$
$$= \mu E_{Q^*}[S_{t+1}|F_t] \; + \; (1-\mu)E_Q[S_{t+1}|F_t]$$
$$= \mu S_t + (1-\mu) S_t = S_t$$

zu μQ^*+ (1-μ)Q ist äquivalentes Martingalmaß zu P:
zu zeigen ist ja also (μQ^*+ (1-μ)Q)(N) = 0 ↔ P(N) = 0:
(μQ^*+ (1-μ)Q)(N) = 0 → Q^*(N) = 0 ↔ P(N) = 0
P(N) = 0 → (μQ^*+ (1-μ)Q)(N) = 0, da Q von P dominiert wird

Somit ist μQ^{*}+ (1-μ)Q Element aus M^{e}(S).

(i)→(iii): Sei g ϵ C. Da S den (NA) genügt ist M^{e}(S) nicht leer (2.7.) und nach Lemma 2.6. gilt E_{Q}[g] ≤ 0, für alle Q ϵ M^{e}(S).

(ii)→(iii): M^{e}(S) ⊂ M^{a}(S).

(iii)→(ii): M^{e}(S) ist dicht in M^{a}(S)

(ii)→(i): Es gelte (ii): E_{Q}[g] ≤ 0 für alle Q ϵ M^{a}(S). Dies ist äquivalent zu αE_{Q}[g] ≤ 0 für α ≥ 0 und für alle Q ϵ M^{a}(S). Nun wissen wir, dass mit dem 2.11. folgendes gilt:

$$(cone(M^{a}(s)))^{0} = (C^{0})^{0} = C.$$

Es ist also cone ($M^{a}(s)$):= { αQ | α ≥ 0, Q ϵ M^{a}(S) } und

$$(cone(M^{a}(s)))^{0} := \{ f \in L^{1}(\Omega,F,P) \mid E_{z}[\, f\,] \leq 0 \text{ für alle } z \in cone(M^{a}(s)) \},$$

wobei z folgende Gestalt hat:

$$z := \alpha Q \text{ mit } \alpha \geq 0 \text{ und } Q \in M^{a}(S).$$

Angenommen: g ∉ C = $(cone(M^{a}(s)))^{0}$.
So existiert ein z_0 ϵ cone ($M^{a}(s)$) mit $E_{z_0}[\, g\,] > 0$
↔ es ex. z_0 ϵ cone ($M^{a}(s)$) mit $E_{Q}\left[\, g\frac{d\alpha Q}{dQ}\,\right] > 0$
↔ es ex. z_0 ϵ cone ($M^{a}(s)$) mit αE_{Q}[g] > 0 mit α ≥ 0 ↯ zu (ii).
Somit ist g ϵ C. q.e.d.

Ähnlich kann auch die folgende Proposition bewiesen werden.

Proposition 2.12. Genüge S den (NA). Dann sind für f ϵ L^{∞} folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ϵ K, d.h. f = $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_{T}$ für eine Strategie H ϵ $\mathcal{H}$.
(ii) E_{Q}[f] = 0, für alle Q ϵ M^{e}(S)
(iii) E_{Q}[f] = 0, für alle Q ϵ M^{a}(S).

Beweis:
(i)→(ii): Sei f ϵ K. Dann ist mit Proposition 2.4. f ϵ C ∩ (-C).
Für f ϵ C ist E_{Q}[f] ≤ 0 für alle Q ϵ M^{e}(S).
Für f ϵ (-C) ist E_{Q}[f] ≥ 0 für alle Qϵ M^{e}(S).
Somit folgt E_{Q}[f] = 0, für alle Q ϵ M^{e}(S).
(ii)→(iii): M^{e}(S) liegt dicht in M^{a}(S)
(iii)→(ii): M^{e}(S) ⊂ M^{a}(S)
(iii)→(i): Gelte (iii): Für alle Q ϵ M^{a}(S) ist E_{Q}[f] = 0.
Betrachte dazu den Beweis zu 2.11. (ii)→(i), für den Fall E_{Q}[f] = 0.
Dann ist gezeigt, dass f ϵ C ist.
Nun gilt mit 2.11. weiter: E_{Q}[f] ≤ 0 für f ϵ C und

$$E_{Q}[\, -f\,] \leq 0 \text{ für } -f \in C \;\rightarrow f \in -C$$

und somit folgt insgesamt f ϵ C ∩ (-C) = K mit 2.6. q.e.d.

Korollar 2.13. Genüge S den (NA) und sei f ϵ L^{∞} mit E_Q[f] = a, für alle Q ϵ M^e(S).
Dann ist f = a + $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_T$ für eine Strategie H. q.e.d.

Korollar 2.14. (2. Fundamentalsatz der Preistheorie)
Genügt S den (NA). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) M^e(S) besteht aus einem Element Q bzw. ist eine Ein-Punkt-Menge

(ii) Jedes f ϵ L^{∞}(Ω,F,P) kann durch f = a + $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_T$ für ein a ϵ R und ein H ϵ $\mathcal{H}$ dargestellt werden.

In diesem Fall sind a = E_Q[f] und das stochastische Integral H·S eindeutig bestimmt und man erhält E_Q[f | F_t] = E_Q[f] + $(\mathrm{H} \cdot \mathrm{S})_t$, für t = 0,…T. q.e.d.

3.Preisfestsetzung für nicht hedgebare Claims

Betrachten wir den linearen Raum erzeugt durch K und den Vektor (f-a), so erhalten wir den erweiterten Raum $K^{\mathrm{f,a}}$, der hedgebaren Claims. Der Preis a sollte so sein, so dass Arbitragemöglichkeiten nicht existieren.

Bemerkung: Gilt $K^{\mathrm{f,a}}$ ∩ L_+^{∞} = {0}, so sagen wir, dass a ein arbitragefreier Preis für einen bedingten Claim f ist.

Theorem 3.1. (Preisfestsetzung für nicht hedgebare Claims)
Genüge S den (NA) und sei f ϵ L^{∞}(Ω,F,P) ein nicht hedgebarer Claim, so sind die obere und die untere Grenze für den fairen Preis bestimmbar:
Definiert sei dazu die untere Grenze durch:

$\underline{\pi}$(f) = inf { $E_Q[\mathrm{f}]$ | Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ },

und die obere Grenze durch:

$\bar{\pi}$(f) = sup { $E_Q[\mathrm{f}]$ | Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ } $(*)$

1) Gilt $\underline{\pi} = \bar{\pi}$, so ist f hedgebar zum Preis π(f) := $\underline{\pi}$(f) = $\bar{\pi}$(f), d.h. f = π(f) + $(H \cdot S)_T$ für ein H ϵ $\mathcal{H}$ und π(f) ist der eindeutig bestimmte arbitragefreie Preis für f.
2) Gilt $\underline{\pi} < \bar{\pi}$, so ist]$\underline{\pi}$, $\bar{\pi}$[= { $E_Q[\mathrm{f}]$ | Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ } ein offenes, nicht leeres und beschränktes Intervall und a ist ein arbitragefreier Preis für f gdw. a in dem Intervall] $\underline{\pi}$, $\bar{\pi}$ [liegt.

Beweis:
Im Falle von $\underline{\pi} = \bar{\pi}$, folgt die Behauptung mit Korollar 2.13.

Im Falle von $\underline{\pi} < \bar{\pi}$, ist zu zeigen, dass die Menge { $E_Q[\mathrm{f}]$ | Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ } =: I ein offenes, nicht-leeres und beschränktes Intervall in R ist:

$\mathbf{I}$ ist nicht leer:
Da S den (NA) genügt, gilt mit 2.7. $M^e(\mathrm{S}) \neq \emptyset$. Somit gibt es ein Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$, so dass $E_Q[\mathrm{~f~}]$ ϵ $\mathbf{I}$.

$\mathbf{I}$ ist ein Intervall:
Sei a ϵ] $\underline{\pi}$, $\bar{\pi}$ [.
∃ Q_1 ϵ $M^e(\mathrm{S})$ mit E_{Q_1}[f] = a_1 ϵ] a, $\bar{\pi} - \rho$[und
∃ Q_2 ϵ $M^e(\mathrm{S})$ mit E_{Q_2}[f] = a_2 ϵ] $\bar{\pi} - \rho$, a [.
Dann ex. τ ϵ (0, 1) mit a = $\tau\mathrm{a}_1$ + (1 – τ)a_2 und Q = τQ_1 + (1 – τ)Q_2.
Somit ist E_Q[f] = a ϵ $\mathbf{I}$.

a ist in $\mathbf{I}$ gdw. a ein arbitragefreier Preis für f ist:
„→“ Sei a ϵ $\mathbf{I}$, dann gibt es ein Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$, so dass E_Q[f] = a ↔ $E_Q[\mathrm{~f} - a~]$ = 0 und somit $K^{\mathrm{f,a}} \cap L_+^\infty$ = {0}.
„←“ Gelte $K^{\mathrm{f,a}} \cap L_+^\infty$ = {0}. Dann lässt sich entsprechend wie im beweis von 2.7. ein W-Maß Q finden, so dass E_Q[g] = 0 für alle g ϵ $K^{\mathrm{f,a}}$ und so dass Q äquivalent zu P ist. Dieses impliziert, dass Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ ist und a = $E_Q[\mathrm{~f~}]$.

Nun zeigen wir, dass $\mathbf{I}$ offen und beschränkt ist:
Wir betrachten also den Fall $\underline{\pi} < \bar{\pi}$.
Gelte a = $\bar{\pi}$(f) ϵ $\mathbf{I}$ (rechte Grenze). Betrachte den bedingten Claim f–$\bar{\pi}$(f).
Nach Definition gilt $E_Q[\mathrm{~f} - \bar{\pi}(\mathrm{f})~] \leq 0$ für alle Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ und somit ist mit 2.11. f–$\bar{\pi}$(f) ϵ C.
Wähle g ϵ K so, dass g ≥ f – $\bar{\pi}$(f). Ist das Supremum in (∗) erreicht bzw. gibt es ein Q^*ϵ $M^e(\mathrm{S})$, so dass E_{Q^*}[f] = $\bar{\pi}$(f) gilt, dann ist 0 = E_{Q^*}[g] ≥ E_{Q^*}[f – $\bar{\pi}$(f)] = 0. Hinsichtlich Q^*~P impliziert dies f–$\bar{\pi}$(f) ≡ g. Somit ist f hedgebar zum Preis $\bar{\pi}$(f). Dieses wiederum impliziert E_Q[f] = $\bar{\pi}$(f) für alle Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ und somit lässt sich $\mathbf{I}$ auf die einelementige Menge {$\bar{\pi}$(f)} reduzieren. Demzufolge kann bei $\underline{\pi} < \bar{\pi}$, $\bar{\pi}$ nicht Element von $\mathbf{I}$ sein. Also ist $\mathbf{I}$ rechtsseitig offen.
Gelte a = $\underline{\pi}$(f) ϵ $\mathbf{I}$ (linke Grenze). So können wir durch einen Wechsel von f zu –f analog vorgehen und zeigen, dass $\mathbf{I}$ auch linksseitig offen ist.
Es ergibt sich somit $\mathbf{I}$=] $\underline{\pi}$, $\bar{\pi}$ [. q.e.d.

Theorem 3.2. (Superreplication)
Genüge S den (NA). Dann gilt für f ϵ L^∞:
$\bar{\pi}$(f) = sup { $E_Q[\mathrm{~f~}]$ | Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$ }
= max { $E_Q[\mathrm{~f~}]$ | Q ϵ $M^a(\mathrm{S})$ }
= min { a | es ex. ein k ϵ K, a + k ≥ f }

Beweis:
Wie bereits in 3.1. gezeigt, ist f–$\bar{\pi}$(f) ϵ C und daher

f = $\bar{\pi}$(f) + g für alle g ϵ C
= $\bar{\pi}$(f) + k – h für ein k ϵ K und h ϵ L_{+}^{∞}
$\leq \bar{\pi}$(f) + k für ein k ϵ K

Das zeigt, dass $\bar{\pi}$(f) $\geq$ inf { a|es ex. ein k ϵ K, a + k $\geq$ f }.

Wir werden zeigen, dass es für den Fall $\bar{\pi}$(f) $>$ a kein Element k ϵ K mit a + k $\geq$ f gibt. Daraus folgt dann schon, dass $\bar{\pi}$(f) = inf { a|es ex. ein k ϵ K, a + k $\geq$ f } gelten muss und dass das Infinimum gleichzeitig das Minimum ist.

Angenommen es gilt $\bar{\pi}$(f) $>$ a.

Dann gibt es ein Q ϵ $M^e(\mathrm{S})$, mit $E_Q[\,\mathrm{f}\,]$ = $\bar{\pi}$(f) $>$ a.

Aber dieses impliziert, dass für alle k ϵ K gilt, dass

$E_Q[\,a + \mathrm{k}\,]$ = a + $E_Q[\,\mathrm{k}\,]$
= a + 0
= a $<$ $E_Q[\,\mathrm{f}\,]$ ↯ zu a + k $\geq$ f. q.e.d.