Übungen

Abgabetermin: Freitag, 19.06.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 35. (3 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ seien Meßräume, $\hat{\Omega}$ sei eine Menge, $g : \Omega \to \hat{\Omega}$ und $f_t : \hat{\Omega} \to \Omega_t$ seien Abbildungen, $t \in T$. Zeigen Sie:

$$g \text{ ist } (\mathcal{A}, \sigma(f_t, t \in T))\text{-messbar} \Leftrightarrow f_t \circ g \text{ ist } (\mathcal{A}, \mathcal{A}_t)\text{-messbar} \quad \forall\, t \in T.$$

Aufgabe 36. (6 Punkte)
$(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$, $t \in T$, seien Meßräume. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : \mathsf{X}_{t\in T}\Omega_t \to \mathbb{R}$ genau dann $(\bigotimes_{t\in T} \mathcal{A}_t, \mathbb{B})$-messbar ist, wenn es eine abzählbare Teilmenge $I \subset T$ und eine $(\bigotimes_{t\in I} \mathcal{A}_t, \mathbb{B})$-messbare Abbildung $g : \mathsf{X}_{t\in I}\Omega_t \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = g \circ \pi_I$ (d. h. f hängt nur von abzählbar vielen Komponenten ab). π_I ist dabei die Projektion von $\mathsf{X}_{t\in T}\Omega_t$ auf $\mathsf{X}_{t\in I}\Omega_t$.

Aufgabe 37. (6 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T)$, $T = [0, \infty[$. Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Elemente von $\mathbb{B}^T$ sind:

a) $A = \{\omega \in \Omega | (\omega_n,\ n \in \mathbb{N}) \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}\}$;

b) $B = \{\omega \in \Omega | t \to \omega_t \text{ ist monoton}\}$;

c) $C = \{\omega \in \Omega | \omega_n = \omega_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\}$;

d) $D = \{\omega \in \Omega | t \to \omega_t \text{ ist beschränkt}\}$;

e) $E = \{\omega \in \Omega | t \to \omega_t \text{ ist stetig}\} = (C[0, \infty[)$.

Aufgabe 38. (6 Punkte)
Seien P die Gleichverteilung auf $[-1, 1]$, Q die Gleichverteilung auf $[0, 1]$ und R die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von $P * P$ und von $P * P * P$.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Q * R$.

Aufgabe 39. (3 Punkte)
Seien μ, ν endliche Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}^d)$, und es sei $\mu \ll \lambda\!\!\lambda^d$. Zeigen Sie: $\mu * \nu \ll \lambda\!\!\lambda^d$.