Übungen

Abgabetermin: Freitag, 15.05.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 18. (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine zweidimensionale Copula C gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie dazu $|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| \quad \forall\, u, v \in [0,1]^2$.

Aufgabe 19. (6 Punkte)
$T : \Omega \to \hat{\Omega},\ S : \Omega \to \mathbb{R}$ seien Abbildungen, und $\hat{\mathcal{A}}$ sei eine σ-Algebra auf $\hat{\Omega}$. Zeigen Sie:
$\exists\, f : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ messbar mit $S = f \circ T \ \Leftrightarrow\ S$ ist $(\sigma(T), \mathbb{B})$-messbar.

Aufgabe 20. (6 Punkte)
F sei eine Verteilungsfunktion, und es sei $F^- :]0,1[\to \mathbb{R}$

$$F^-(u) := \inf\{z \in \mathbb{R} | F(z) \geq u\}$$

die inverse Verteilungsfunktion (Pseudoinverse, Quantilfunktion) von F. Zeigen Sie:

a) F^- ist monoton wachsend, linksseitig stetig, $(\mathbb{B} \cap]0,1[, \mathbb{B})$-messbar.

b) $F^- \circ F(x) \leq x$ und $u \leq F \circ F^-(u) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ u \in]0,1[$.

Aufgabe 21. (6 Punkte)
P sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der Verteilungsfunktion F, und Q sei die Rechteckverteilung auf $]0,1[$. Zeigen Sie:

a) $Q^{F^-} = P$;

b) $P^F = Q$, falls F stetig ist.