Übungen

Abgabetermin: Freitag, 08.05.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 14. (6 Punkte)
Sei $\Omega =]0,1] \cap \mathbb{Q}$, und $\mathcal{A}$ sei die von den Intervallen $\{]a,b] \cap \mathbb{Q} | a,b \in \mathbb{R},\ 0 \le a < b \le 1\}$ erzeugte Algebra. Zeigen Sie, dass die Mengenfunktion

$$]a,b] \cap \mathbb{Q} \to \mu(]a,b] \cap \mathbb{Q}) = b - a, \quad 0 \le a < b \le 1,$$

eindeutig zu einem W-Inhalt auf $\mathcal{A}$, aber nicht zu einem W-Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 15. (6 Punkte)
$F, G, F_1, F_2, \ldots$ seien Verteilungsfunktionen; außerdem seien $a \in \mathbb{R},\ 0 < b < \infty$, $n \in \mathbb{N},\ (a_i,\ i \in \mathbb{N}) \subset]0,\infty[$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Welche der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen sind dann stets wieder Verteilungsfunktionen?

$$F \cdot G, F \vee G,\ F \wedge G,\ F^n,\ \sqrt{F},\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i F_i,\ |2F - G|,$$
$$\frac{F}{2-G},\ \exp(-\frac{1-F}{F}),\ x \to F(x-a),\ x \to F(bx).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f \circ F$ und $F \circ g$ Verteilungsfunktionen sind, wenn $f : [0,1] \to [0,1]$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, surjektiv, monoton steigend sind, und F eine Verteilungsfunktion ist. Ist $h : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ stetig, surjektiv, schwach monoton (d. h. $x_1 \le x_2,\ y_1 \le y_2 \Rightarrow h(x_1, y_1) \le h(x_2, y_2)$), und sind $F,\ G$ Verteilungsfunktionen, dann ist $h \circ (F, G)$ eine Verteilungsfunktion.

Aufgabe 16. (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i},\ x_i \in \{0,2\}\}$$

eine überabzählbare, kompakte Menge ist mit $\lambda\!\!\lambda(C) = 0$.
Hinweis (Geometrische Konstruktion von C):
Man entfernt das mittlere offene Teilintervall $]1/3, 2/3[$ von $[0,1]$. Dann teilt man die verbleibenden zwei Teilintervalle jeweils in drei gleich lange Teilintervalle und entfernt jeweils wieder das mittlere offene Teilintervall. Dieses Verfahren wird ad infinitum fortgesetzt. Zeigen Sie, dass C die Restmenge ist.

Aufgabe 17. (6 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ 1, & \text{falls } x > 1 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, & \text{falls } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} \in C,\ x_i \in \{0,1\} \\ \sup\{F(y) \mid y \in C, y < x\}, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus C \end{cases}.$$

Dabei ist C die in Aufgabe 16 angegebene Cantor-Menge. Zeigen Sie:

a) F ist eine stetige Verteilungsfunktion mit $F(C) = [0,1]$.

b) Sei P das von F induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Dann gilt $P(C) = 1$, d. h. $\lambda\!\!\lambda \mid [0,1]$ und P sind orthogonale Wahrscheinlichkeitsmaße.