Übungen

Abgabetermin: Freitag, 10.07.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 48. (6 Punkte)
Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R},\mathbb{B})$. Überprüfen Sie, ob Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz) vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes:

a) $\mu_n = \text{Poisson}(\alpha_n)$, $\alpha_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to \alpha$;

b) $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{\frac{1}{i}}$;

c) $\mu_n = R[-n,n]$;

d) $\mu_n = \mathcal{N}(0,\frac{1}{n})$;

e) $\mu_n = \mathcal{N}(0,n)$.

Aufgabe 49. (6 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien reelle Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, F_0 stetig, und es sei $X_n \to X_0$ in Verteilung. Zeigen Sie:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F_0(t)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Aufgabe 50. (3 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien reelle Zufallsgrößen, $X_n \to X_0$ und $Y_n \to Y_0$ konvergieren in Verteilung. Zeigen Sie, dass $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i. a. nicht in Verteilung konvergiert.

Aufgabe 51. (3 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, und es sei $X_n \to X_0$ in Verteilung. Zeigen Sie:

$$E|X_0| \le \liminf E|X_n|.$$

Aufgabe 52. (6 Punkte)
Sei (X_n) eine Folge von $\mathcal{N}(a_n,\sigma_n^2)$-verteilten Zufallsvariablen, die in Verteilung gegen eine Zufallsvariable Z konvergiert. Zeigen Sie:

a) Es gibt $\sigma^2 \ge 0$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ und $a_n \to a$.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von Z.