Übungen

Abgabetermin: Freitag, 26.06.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 40. (6 Punkte)

a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ an, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ und dennoch $P(\overline{\lim}\ A_n) = 0$ gilt.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $P(\overline{\lim}\ A_n) = 1$, falls $\sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap A_n) = \infty$ ist für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$.

c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $P(\overline{\lim}\ A_n) \leq 1 - P(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap A_n) < \infty$.

Aufgabe 41. (6 Punkte)
$(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ seien reelle Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0, \infty[$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$ P-f.s. konvergiert.

b) Sei zusätzlich $P(X_n \neq 0\ \infty \text{ oft}) = 1$. Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $P(|c_n X_n| > 1\ \infty \text{ oft}) = 1$.

Hinweis: Lemma von Borel-Cantelli. In der Aufgabe werden keine Unabhängigkeitsannahmen gemacht.

Aufgabe 42. (6 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle ZV, und $\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ sei die σ-Algebra der (X_n)-terminalen Ereignisse. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen reeller Zahlen mit $b_n > 0$, $\lim b_n = \infty$, und es sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

a) $\underline{\lim}\, X_n$, $\overline{\lim}\, X_n$, $\overline{\lim}\, (\frac{1}{b_n} \sum_1^n X_i - a_n)$ sind (X_n)-terminale Zufallsgrößen (d. h. sie sind $(\mathcal{T}_\infty, \overline{\mathbb{B}})$-messbar).

b) $\{\lim X_n = a\}$, $\{(\frac{1}{n} \sum_1^n X_i,\ n \in \mathbb{N}) \text{ konvergiert}\}$, $\{(\sum_1^n X_i,\ n \in \mathbb{N}) \text{ konvergiert}\}$ sind (X_n)-terminale Ereignisse.

c) $\{\lim \sum_1^n X_i = a\}$ ist i.a. nicht (X_n)-terminal.

Aufgabe 43. (6 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}, \mathbb{B}, Q)$, wobei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ ist. Weiter sei $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Shift-Operator, d. h. $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, und $\mathcal{I} = \{A \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}} : S^{-1}(A) = A\}$ das System der shift-invarianten Mengen. Zeigen Sie, dass $P(A) \in \{0, 1\}$ ist für alle $A \in \mathcal{I}$.
Hinweis: $\{0, 1\}$-Gesetz von Kolmogorov.