Übungen

Abgabetermin: Freitag, 29.05.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 26. (6 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}$ sei offen, und $g : \Omega \times Q \to \mathbb{R}$ sei eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $g(\cdot, t)$ ist μ-integrierbar für alle $t \in Q$.

(ii) $g(\omega, \cdot)$ ist differenzierbar für μ-fast alle $\omega \in \Omega$.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|\frac{\partial}{\partial t} g(\cdot, t)| \leq h \quad \forall\, t \in Q$.

Zeigen Sie: Die Funktion $G : Q \to \mathbb{R},\ G(t) = \int g(\omega, t)\mu(d\omega)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$G'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} g(,\omega, t)\mu(d\omega).$$

Aufgabe 27. (6 Punkte)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie:

a) $x \mapsto F(x) := \int_{]-\infty, x]} f(t)\lambda\!\!\lambda(dt)$ ist gleichmäßig stetig.

b) Ist f stetig in x_0, dann ist F differenzierbar in x_0, und es ist $F'(x_0) = f(x_0)$.

Aufgabe 28. (6 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei messbar, und es sei $0 < p < \infty$. Zeigen Sie:

a) $\|f\|_p < \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} n^p P(|f| > n) = 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} n^p P(|f| > n) = 0 \;\Rightarrow\; \|f\|_\alpha < \infty \quad \forall\, 0 < \alpha < p$.

c) Die Umkehrung in b) gilt nicht.

Hinweis zu b), den Sie ohne Beweis verwenden können. Es ist

$$\int |f|^\alpha \, d\lambda\!\!\lambda = \alpha \int t^{\alpha-1} P(|f| > t)\lambda\!\!\lambda(dt)$$

.

Aufgabe 29. (6 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei $(f_n, n \in \mathbb{N}_0) \subset L^1(P)$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\|f_n - f_0\| \to 0$.

(ii) $\|f_n\| \to \|f_0\| \quad \text{und} \quad P(|f_n - f_0| > \varepsilon) \to 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$

Hinweis. $(f_n, n \in \mathbb{N})$ besitzt eine Teilfolge, die für P-fast alle $\omega \in \Omega$ konvergiert.