Übungen

Abgabetermin: Freitag, 24.04.2009, 10.15 Uhr

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathcal{A}$ und

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{A} : P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\}$$

die Menge der "von A unabhängigen Ereignisse". Zeigen Sie:

a) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.

b) $\mathcal{D}$ ist im allgemeinen keine Algebra.

Aufgabe 8. (6 Punkte)
Sei μ ein Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) μ Maß $\Rightarrow$ μ stetig nach unten $\Leftrightarrow$ μ $\emptyset$-stetig.

b) Sei zusätzlich $\mu(\Omega) < \infty$. Dann gilt auch: μ $\emptyset$-stetig $\Rightarrow$ μ Maß.

Aufgabe 9. (6 Punkte)
Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und

$$\mathcal{N}_\mu := \{M \subset \Omega \mid \exists N \in \mathcal{A} \text{ mit } M \subset N \text{ und } \mu(N) = 0\}$$

das System der μ-Nullmengen. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\hat{\mu}$ auf $\mathcal{A}_\mu = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu)$ existiert mit $\hat{\mu}|\mathcal{A} = \mu$. $\hat{\mu}$ heißt Vervollständigung von μ.

Hinweis: Es ist $\mathcal{A}_\mu = \{A \cup N | A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}$.

Aufgabe 10. (6 Punkte)

a) Sei Ω eine nichtleere Menge, I eine Indexmenge und $A_i, B_i \subset \Omega,\ i \in I$. Zeigen Sie:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \Delta \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) \subset \bigcup_{i \in I} (A_i \Delta B_i).$$

b) Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\sigma(\mathcal{A})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dynkin-System-Argumentes und Teil a): Zu jeder Menge $S \in \sigma(\mathcal{A})$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A \Delta S) < \varepsilon$.

c) Gilt diese Eigenschaft auch noch, wenn man die Algebra durch einen $\cap$-stabilen Erzeuger ersetzt?