Übungen (Keine Abgabe)

Die folgenden Aufgaben werden in den ersten Übungsstunden besprochen.

Aufgabe 1.
Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{E} := \{\{x\} : x \in \Omega\}$ das System aller Einpunktmengen. Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte Algebra $\alpha(\mathcal{E})$, σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ sowie das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$.

Bemerkung: $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Algebra, falls (i) $\Omega \in \mathcal{A}$, (ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, (iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ gilt.

Aufgabe 2.
Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Geben sie zwei σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf Ω an, so dass die Vereinigung $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ keine σ-Algebra auf Ω ist.

b) Geben Sie ein Dynkin-System auf Ω an, das keine σ-Algebra auf Ω ist.

Aufgabe 3.
Sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{A}$, d. h. $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Zeigen Sie: Zu jeder Menge $S \in \mathcal{A}$ existiert eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit $S \in \sigma((E_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Aufgabe 4.
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, und es sei $M \subset \Omega$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{B} := \{A \cap M + B \cap M^c | A, B \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra.

b) $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \{M\})$.

c) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ genau dann, wenn $M \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 5.
Sei $\mathbb{B}$ die von $\mathcal{E} := \{(a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$ erzeugte σ-Algebra der Borel-Mengen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch die folgenden Mengensysteme Erzeuger von $\mathbb{B}$ sind:
$\mathcal{E}_1 = \{(-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}$;
$\mathcal{E}_2 = \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ offen}\}$;
$\mathcal{E}_3 = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\}$;
$\mathcal{E}_4 = \{K \subset \mathbb{R} : K \text{ kompakt}\}$;
$\mathcal{E}_5 = \{]r, q[\mid r, q \in \mathbb{Q},\ -\infty < r < q < \infty\}$.

Aufgabe 6.
Sei μ ein Inhalt auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Maß ist, wenn μ sub-σ-additiv ist; i.e.

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$\forall$ Folgen $(A_n,\, n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{A}$.