

5 Optische Multistabilität und optische Instabilitäten

5.1 Elementare Betrachtungen

Wir betrachten einen Fabry–Pérot–Resonator, der aus ebenen, unendlich großen Spiegeln aufgebaut ist, die im Abstand l aufgestellt sind. Das Reflexionsvermögen beider Spiegel sei R , die Transmission T und es sei $R + T = 1$. Außerdem sei $R \approx 1$. Der Resonator sei mit einem Medium gefüllt, dessen Absorption sättigbar sei. Der Absorptionskoeffizient sei

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s}.$$

Dabei sei α_0 die Kleinsignalabsorption, I die Intensität und I_s die Sättigungsintensität. Für die transmittierte Intensität gilt bekanntlich (vgl. z. B. Vorlesung API):

$$I_T = I_0 \cdot \frac{T^2 V}{(1 - RV)^2 + 4RV \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (1)$$

Dabei ist I_0 die Intensität einer einfallenden ebenen Welle; der Verlustfaktor

$$V = e^{-2\alpha l}$$

beschreibt die Absorptionsverluste bei einem vollen Resonatorumlauf. Wir wollen annehmen $\alpha l \ll 1$. In diesem Fall ist

$$V \approx 1 - 2\alpha l.$$

Weiter ist

$$\delta = \arg(r_1) + \arg(r_2) + 2kl,$$

d. h. es bezeichnet die bei einem Umlauf auftretende Phasenverschiebung. $\arg(r_i)$ sind die an den Spiegeln auftretenden Phasensprünge. Wir nehmen zunächst Resonanz an, d. h. $\delta = N \cdot 2\pi$ (N ganzzahlig). In diesem Fall ergibt sich also

$$I_T = I_0 \cdot \frac{T^2 V}{(1 - RV)^2}. \quad (2)$$

Im Nenner können wir umformen:

$$1 - RV = (1 - R) \cdot \left(1 + \frac{R(1 - V)}{1 - R}\right) = (1 - R) \cdot \left(1 + \frac{2R\alpha \cdot l}{1 - R}\right).$$

Wegen $T = 1 - R$ erhalten wir

$$I_T = \frac{(1 - 2\alpha l)I_0}{\left(1 + \frac{2R\alpha l}{1 - R}\right)^2}.$$

Den α -abhängigen Term im Zähler können wir für $\alpha l \rightarrow 0$ vernachlässigen; im Nenner ist das jedoch nicht möglich, wenn gleichzeitig $R \rightarrow 1$. Wir führen für diesen Fall eine Größe

$$C = \frac{R \cdot \alpha_0 l}{1 - R} \quad \text{„Kooperativitätsparameter“}$$

ein. Außerdem berücksichtigen wir, dass im Inneren des Resonators die Intensität den Wert

$$I = I_T/T$$

hat. Es ist also in guter Näherung

$$I_T = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{2C}{1+(I_T/T \cdot I_s)}\right)^2}.$$

Mit den Abkürzungen

$$X = \sqrt{\frac{I_T}{T \cdot I_s}}, \quad Y = \sqrt{\frac{I_0}{T \cdot I_s}}$$

ergibt sich schließlich:

$$X = \frac{Y}{1 + \frac{2C}{1+X^2}}$$

bzw.

$$Y = X \cdot \left(1 + \frac{2C}{1+X^2}\right). \quad (3)$$

Man kann Y als Funktion von X ohne weiteres zeichnen. Es zeigt sich, dass die Funktion

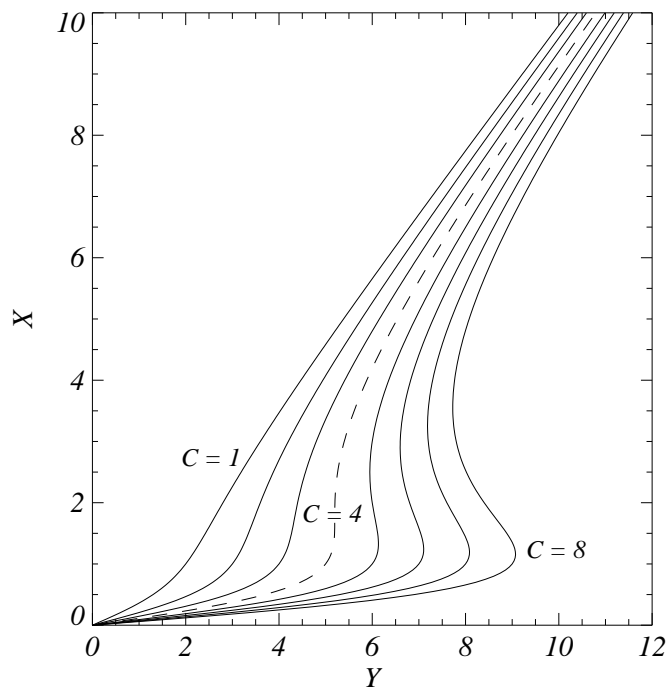


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Eingangsintensität und Ausgangsintensität bei der absorptiven optischen Bistabilität

für $C > 4$ nicht monoton ist. Da Y mit der Eingangsintensität und X mit der transmittierten Intensität verknüpft ist, wird man allerdings nach der Umkehrfunktion fragen, die

man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden erhält (Abb. 1). Diese ist demnach für $C > 4$ s-förmig, d. h. es gibt zwischen Y_1 und Y_2 einen Bereich, in dem jedem Wert von Y drei Werte von X zugeordnet sind.

Variiert man Y von kleinen Werten nach oben, so läuft man auf dem „unteren Ast“, bis man zu dem Wert Y_2 kommt, bei dem eine vertikale Tangente auftritt (Abb. 2). Bei

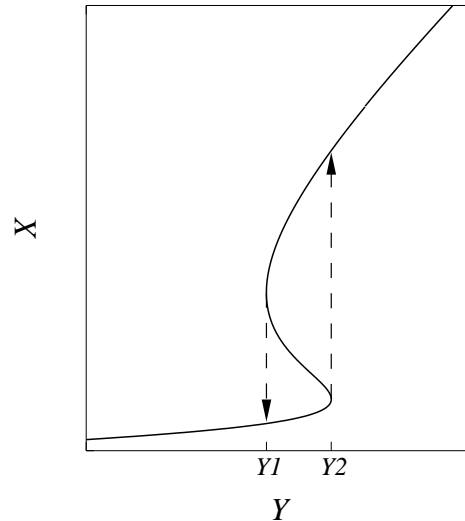


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Schaltverhaltens bei der optischen Bistabilität

weiterer Vergrößerung von Y existiert nur noch eine Lösung auf dem „oberen Ast“. Das System muss unstetig auf diesen übergehen. Reduziert man jetzt Y wieder, so bleibt man auf dem oberen Ast, bis man zu Y_1 kommt. Da der obere Ast hier endet, muss man wieder zu dem unteren Ast übergehen. Es gibt also *unstetige Übergänge* und eine *Hysterese*. Dies ist ein typisches Verhalten nichtlinearer Systeme.

Auf den Ast mit negativer Steigung kommt man nicht ohne weiteres. Wir werden später sehen, dass er zu instabilen Zuständen des Systemes gehört, während die beiden äußeren Äste stabil sind. Daher spricht man von „optischer Bistabilität“. Da sie hier auf dem Verhalten der Absorption beruht, handelt es sich um „absorptive optische Bistabilität“.

Als zweiten Spezialfall wollen wir den absorptionsfreien Fall $\alpha = 0$ betrachten. Das Medium sei jedoch ein „Kerr-Medium“, d. h.

$$n = n_0 + n_2 \cdot I$$

In diesem Fall ist nach Gl. (1)

$$I_T = \frac{I_0}{1 + F \cdot \sin^2(\delta/2)}$$

mit

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

und

$$\begin{aligned}\delta &= 2l \cdot \omega(n_0 + n_2 I_T/T)/c \\ &= 2(\delta_0 + \epsilon \cdot I_T)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\delta_0 &= l\omega n_0/c \\ \epsilon &= l\omega n_2/(c \cdot T).\end{aligned}$$

Es sei jetzt $\delta/2 = N\pi + \delta'$ und $\delta' \ll \pi$ (N ganzzahlig). Dann ist

$$\sin^2(\delta/2) \approx (\delta'/2)^2 = (\delta_0 - N \cdot \pi + \epsilon \cdot I_T)^2$$

und damit

$$I_T = \frac{I_0}{1 + (D + E \cdot I_T)^2} \quad (4)$$

$$\text{mit } D = \sqrt{F} \cdot (\delta_0 - N\pi)$$

$$\text{und } E = \epsilon \cdot \sqrt{F}$$

Führen wir noch die neuen Variablen

$$X = E \cdot I_T, \quad Y = E \cdot I_0$$

ein, so haben wir nun den Zusammenhang

$$Y = X \cdot [1 + (D + X)^2].$$

Es handelt sich also wieder um einen kubischen Zusammenhang, allerdings jetzt für die Intensität. In der Umgebung von $X = -D$ besitzt Y ein Minimum (wegen $I_T \geq 0$ ist $X \geq 0$ für $\text{sgn}(n_2) = \text{sgn}(E) = 1$ und $X \leq 0$ für $\text{sgn}(n_2) = -1$.)

Nützlich ist auch eine andere Schreibweise von Gl. (4):

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{D + I_T}{\frac{1}{E}}\right)^2} \quad (5)$$

In Gl. (5) steht auf der linken Seite eine lineare Funktion von I_T , deren Steigung mit zunehmendem I_0 kleiner wird. Auf der rechten Seite steht eine Lorentzkurve, die an der Stelle $I_T = -D/E$ ihr Maximum mit dem Wert 1 und die Halbwertsbreite $1/E$ hat. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es zu jedem Wert von I_0 mindestens einen und höchstens drei Schnittpunkte zwischen den beiden Graphen gibt (vgl. Abb. 3).

Die Argumentation läuft jetzt ähnlich wie bei der absorptiven Bistabilität, d. h. es gibt unstetige Übergänge und Hysterese. Da jetzt die „Dispersion“ (d. h. der nichtlineare Brechungsindex) verantwortlich ist, spricht man von „dispersiver Bistabilität“. Im Experiment erkennt man sie daran, dass $I_T \rightarrow 0$ für sehr große I_0 : der Term $n_2 I$ schiebt das System über die Resonanz hinaus.

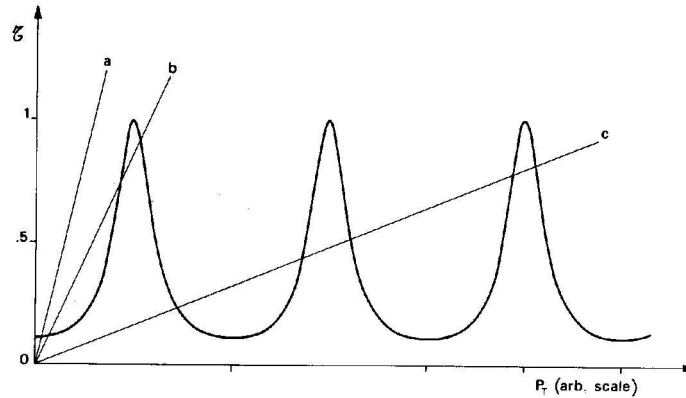


Abbildung 3: Graphische Behandlung der dispersiven optischen Bistabilität. Man beachte, dass es mehr als drei Schnittpunkte zwischen den Geraden und der Airy-Kurve geben kann, wenn mehrere Resonanzen ins Spiel kommen.

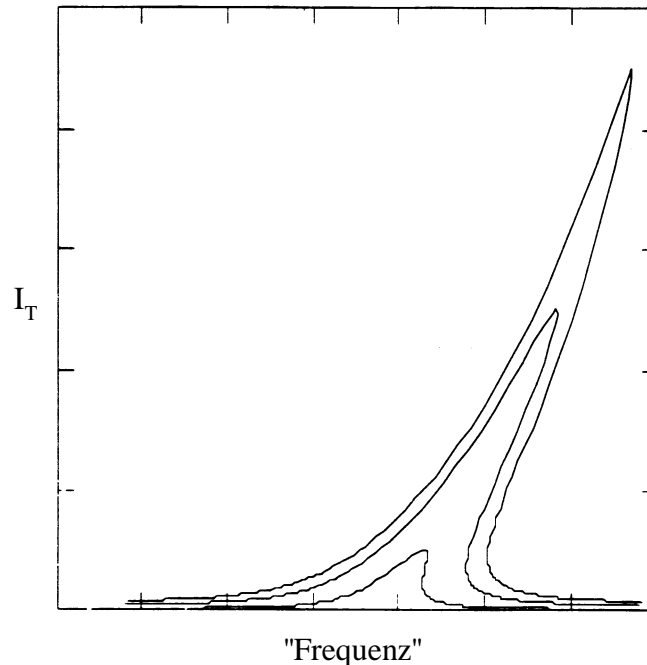


Abbildung 4: Transmittierte Intensität als Funktion der Frequenz bzw. der Resonatorlänge im Fall einer dispersiven Bistabilität

Instruktiv ist es ferner, für einen gegebenen Wert von I_0 die ω -Abhängigkeit zu betrachten. Man erhält dann eine typische „nichtlineare Resonanz“ (vgl. Abb. 4), die ebenfalls Bistabilität zeigen kann. Derartige Resonanzkurven treten z. B. auch bei mechanischen Resonatoren mit anharmonischem Potential oder bei Schwingkreisen mit einem nichtlinearen Element auf.

Die potentielle Bedeutung der optischen Bistabilität in Bezug auf Anwendungen liegt darin, dass bistabile optische Elemente Analoga zu bistabilen elektronischen Elementen darstellen. Letztere sind die Grundlage der Digitaltechnik mit ihren bekannten Vorzügen gegenüber der Analogtechnik. Da die Übertragung von Information bereits heute vorwiegend optisch mit Hilfe von Glasfasern erfolgt, ist es wünschenswert, auch die weitere

Verarbeitung der Information optisch vorzunehmen. Man benötigt dann optisch bistabile Elemente. Die optische Bistabilität lässt sich experimentell leicht demonstrieren, doch sind bisher entweder die benötigten optischen Leistungen zu groß oder die Elemente sind zu langsam.

5.2 Die Maxwell–Bloch–Gleichungen

Bei der theoretischen Behandlung eines optischen Resonators, der mit einem nichtlinearen Medium gefüllt ist, erweist es sich als wünschenswert, eine langsame Variation der Amplituden des elektrischen Feldes bzw. der Polarisation des Mediums annehmen zu können. Daher ist das Auftreten von Stehwellen sehr störend und die Theorie behandelt im allgemeinen (unidirektionale) Ringresonatoren. Wir stellen uns vor, dass in einem derartigen Resonator ebene Wellen umlaufen, deren räumliche Amplitudenänderung vernachlässigt werden kann („uniform field–model“). Der Resonator sei gleichmäßig mit 2–Niveaumatomen gefüllt (vgl. Abb. 4). Es wird ein monochromatisches Feld mit der Amplitude E_0 eingestrahlt. Außerdem sei evtl. ein Pumpmechanismus vorhanden, der den Besetzungszahlunterschied zwischen den beiden betrachteten atomaren Niveaus beeinflusst und auch Inversion erzeugen kann (das setzt natürlich die Existenz von mehr als zwei atomaren Niveaus voraus, die jedoch hier nicht betrachtet werden). Es wird eine Gleichung für das Verhalten des elektrischen Feldes benötigt; diese ergibt sich aus den Maxwell–Gln. unter Berücksichtigung der Randbedingungen, die durch die Spiegel vorgegeben werden. Die Maxwell–Gln. enthalten die Polarisation des Mediums. Diese erhält man aus den Blochschen Gln., wenn das elektrische Feld bekannt ist. Man benötigt zur Berechnung der Polarisation ferner den Besetzungszahlunterschied der atomaren Niveaus, die „Inversion“; diese ergibt sich bei gegebenem Feld ebenfalls aus den Blochschen Gln. Insgesamt wird man also die Maxwell–Gln. und die Blochschen Gln. koppeln müssen. Dies ist besonders einfach, wenn das eingestrahlte äußere Feld in Resonanz mit dem atomaren Übergang und mit einer Resonanzfrequenz des Resonators ist. In diesem Fall ergeben sich bei einer Besetzungszahländerung keine Verschiebungen der Resonanz und zwischen elektrischem Feld und Polarisation besteht eine Phasenverschiebung von $\pi/2$. Wird also die Phase des elektrischen Feldes so gewählt, dass die komplexe Amplitude des elektrischen Feldes reell ist, so ist die komplexe Amplitude der Polarisation rein imaginär. Es ist also ausreichend, gekoppelte DGLn. für den Realteil der komplexen Amplitude des elektrischen Feldes, den Imaginärteil der komplexen Amplitude der Polarisation und für die reelle „Inversion“ anzugeben. Diese drei Größen werden im allgemeinen als E , P und D bezeichnet. Man findet

$$\dot{E} = -\kappa \cdot (E - E_0) + g \cdot P \quad (6)$$

$$\dot{P} = -\gamma_2 \cdot P + g \cdot E \cdot D \quad (7)$$

$$\dot{D} = -\gamma_1(D - D_0) - 4g \cdot E \cdot P \quad (8)$$

Dabei ist E_0 die Feldstärke, die sich unter der Wirkung des eingestrahlteten Feldes ohne Medium ausbilden würde. D_0 ist die Inversion, die sich unter der Wirkung des Pumpmechanismus ohne elektrisches Feld einstellen würde. Ohne die Kopplung zwischen Feld und Medium — beschrieben durch die Kopplungskonstante g — würde also E mit der Relaxationskonstante κ gegen E_0 relaxieren, P würde mit der „transversalen Ratenkonstante“ γ_2

gegen der Wert 0 und D mit der „longitudinalen Ratenkonstante“ γ_1 gegen D_0 relaxieren. Wie aus Kap. 3 bekannt ist, entsteht eine Polarisation durch Einwirkung des elektrischen Feldes auf die Inversion; die Inversion ändert sich durch Einwirkung des elektrischen Feldes auf die Polarisation. Das Medium wirkt nur über die Polarisation auf das elektrische Feld ein. Die stationären Lösungen $\dot{E} = \dot{P} = \dot{D} = 0$ dieser „Maxwell–Bloch–Gln.“ sind

$$\hat{D} = \frac{\hat{D}_0}{1 + \hat{E}^2} \quad (9)$$

$$\hat{P} = \frac{\hat{E}\hat{D}_0}{1 + \hat{E}^2} \quad (10)$$

$$\hat{E}_0 = \hat{E} - \hat{D}_0 \frac{\hat{E}}{1 + \hat{E}^2} \quad (11)$$

dabei haben wir definiert

$$\hat{E} = E/E_c, E_c^2 = \gamma_1\gamma_2/2g, \hat{E}_0 = E_0/E_c$$

$$\hat{D} = D/D_{th}, D_{th} = \kappa\gamma_2/g^2, \hat{D}_0 = D_0/D_{th}$$

$$\hat{P} = P/P_0, P_0 = \frac{\gamma_2}{g \cdot E_c \cdot D_{th}}$$

5.2.1 Das Bonifacio–Lugiato–Modell der absorptiven optischen Bistabilität

Im Fall der optischen Bistabilität wird im allgemeinen kein Pumpmechanismus vorhanden sein, d. h. $D_0 = -1$ sein. Dann ist

$$\hat{D}_0 = -\frac{1}{D_{th}} = -\frac{g^2}{\kappa\gamma_2}$$

und

$$\hat{E}_0 = \hat{E} + \frac{g^2}{\kappa \cdot \gamma_2} \cdot \frac{\hat{E}}{1 + \hat{E}^2}$$

Offenbar finden wir hier eine Gleichung von der Form der Gl. (3), wenn wir

$$2C = \frac{g^2}{\kappa \cdot \gamma_2}$$

setzen. In diesem Zusammenhang wird von dem am Anfang des Abschnittes 5.2 vorgestellten Modell mit den Gleichungen (6)–(8) auch vom „Bonifacio–Lugiato–Modell“ gesprochen. Es leistet jedoch deutlich mehr als unsere elementaren Betrachtungen in Abschn. 5.1, da wir jetzt auch Aussagen über das dynamische Verhalten bekommen. Wir nehmen an, dass die Relaxation von P und D schnell erfolgt gegenüber der Relaxation von

$E^{31}(\gamma_1 \gg \kappa, \gamma_2 \gg \kappa)$, so dass sich zu jedem Wert der langsamen Variablen E der stationäre Wert von P und D einstellt („adiabatische Elimination von P und D “); das Verhalten der langsamen Variablen E „versklavt“ dann die schnellen Variablen. Für diesen Fall erhalten wir aus Gl. (6) durch Multiplikation mit $\frac{1}{\kappa \cdot E_C}$

$$\frac{d\hat{E}}{\kappa \cdot dt} = \hat{E}_0 - \hat{E} + \frac{g}{\kappa \cdot E_C} \cdot \hat{P}$$

mit

$$\frac{g}{\kappa \cdot E_C} P = \frac{g}{\kappa \cdot E_C} \cdot \frac{g \cdot E_C \cdot D_{th}}{\gamma_2} \cdot \frac{\hat{E} \cdot \hat{D}_0}{1 + \hat{E}^2} = -\frac{g^2}{\kappa \cdot \gamma_2} \cdot \frac{1}{1 + \hat{E}^2} = -2C \cdot \frac{1}{1 + \hat{E}^2}.$$

Führen wir noch die dimensionslose Größe $d\tau = \kappa \cdot dt$ ein und definieren $X = \hat{E}$ und $Y = \hat{E}_0$, so erhalten wir

$$\frac{dX}{d\tau} = Y - X - 2C \cdot \frac{X}{1 + X^2}.$$

Wegen der adiabatischen Elimination von P und D wird der momentane Zustand des Systems durch die „Zustandsvariable“ X bestimmt. Ihre zeitliche Änderung wird beschrieben durch die DGL.

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial X}$$

mit

$$U = -YX + \frac{X^2}{2} + C \cdot \log(1 + X^2).$$

Die Änderung von X erfolgt also so, wie die überdämpfte Bewegung eines Massepunktes in einem Potential U , das von dem „Kontrollparameter“ Y und dem „Kooperativitätsparameter“ C abhängt. U wird auch als „Landau-Potential“ bezeichnet. In Abb. 5 ist U für verschiedene Werte von Y gezeichnet. Es zeigt sich, dass (für $C > 4$) das Potential im Bereich (Y_1, Y_2) zwei Minima besitzt, so dass das System für $Y \in (Y_1, Y_2)$ zwei stabile Zustände besitzt. Das Maximum zwischen den beiden Minima gehört auch zu einem Gleichgewichtspunkt, der jedoch instabil ist. Diesem instabilen Gleichgewichtspunkt ist der Ast mit negativer Steigung in den Zustandskurven von Abb. 1 und 2 zugeordnet. Im Fall $Y = Y_1$ und $Y = Y_2$ gibt es einen Wendepunkt in U mit horizontaler Tangente. Schaltet man Y von $Y < Y_1$ nach $Y = Y_2$ oder von $Y > Y_2$ nach $Y = Y_1$, so läuft das System in diesen Sattelpunkt. Ist die Schwelle Y_2 geringfügig überschritten bzw. Y_1 geringfügig unterschritten, so wird das System in der Umgebung des Sattelpunktes sehr langsam: es gibt eine „lethargische Phase“ in dem Schaltvorgang zu dem (einzig) stabilen Gleichgewichtspunkt. Etwas ungenau spricht man auch von „critical slowing down“.

Durch experimentelle Tricks kann man ein optisch bistabiles System auch in der Umgebung des Maximums der Zustandskurve präparieren. Wegen der geringen Steigung dauert es auch in diesem Fall lange, bis das System im Minimum anlangt („uncritical slowing down“).

³¹Die Annahme des ortsunabhängigen Feldes im Inneren des Resonators erfordert ohnehin, dass am Auskoppelspiegel nur wenig Licht ausgekoppelt wird, d. h., dass κ klein ist.

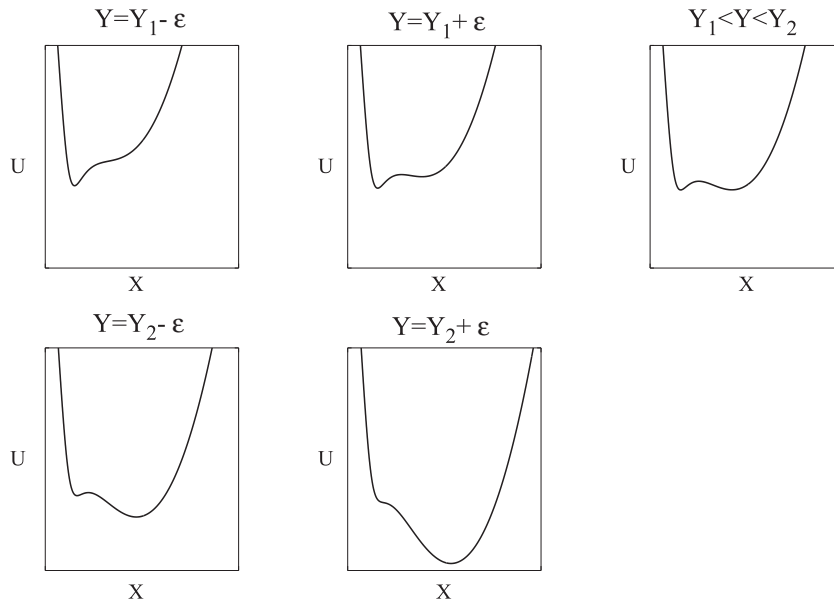


Abbildung 5: Potentiale U für die optische Bistabilität. U hängt von dem Kontrollparameter Y ab. Die Potentiale gelten der Reihe nach dicht unterhalb und dicht oberhalb der Schwelle Y_1 , mitten im bistabilen Bereich und dicht unterhalb und dicht oberhalb der Schwelle Y_2 .

Die wahre Leistungsfähigkeit der Potentialvorstellung tritt zutage, wenn man noch stochastische Störungen zulässt. Abgesehen von einem einzigen Wert von Y gibt es dann auch in bistabilen Bereich nur *ein* „globales“ Minimum von U , das einem stabilen Gleichgewicht entspricht. Das andere Minimum ist nur „lokal“ und entspricht einem „metastabilen“ Gleichgewicht. In der Nähe der Schwellwerte werden die lokalen Minima sehr flach, d. h. kleine Störungen können das System weit vom Gleichgewichtswert von X wegtreiben und das System kehrt nur langsam zum Gleichgewichtswert zurück.

5.2.2 Das Haken–Lorenz–Modell des Lasers

Sofern P und D adiabatisch eliminiert werden können, lautet die stationäre Lösung von Gl. (11) im Fall $E_0 = 0$

$$\hat{E} - \hat{D}_0 \cdot \frac{\hat{E}}{1 + \hat{E}^2} = 0$$

bzw.

$$\hat{E} \cdot \left(1 - \frac{\hat{D}_0}{1 + \hat{E}^2} \right) = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt in dem trivialen Fall

$$\hat{E} = 0$$

und in dem Fall

$$\hat{E} = \sqrt{\hat{D}_0 - 1} = \sqrt{\frac{D_0}{D_{th}} - 1}.$$

Wenn der Pumpmechanismus von kleinen Werten aus gesteigert wird, so überschreitet D_0 irgendwann den Wert D_{th} und es tritt ein Zustand auf, bei dem ohne injiziertes Feld eine nichtverschwindende Feldstärke vorhanden ist. Man bezeichnet sie bekanntlich als „Laseremission“ und D_{th} als „Schwellinversion“. Die Gl. (6) liefert uns mit Gl. (10)

$$\frac{d\hat{E}}{d\tau} = -\hat{E} + \frac{g}{k \cdot E_C} \cdot P = -\hat{E} + \frac{g^2 D_{th}}{\kappa \cdot \gamma_2} \cdot \frac{\hat{D}_0 \cdot \hat{E}}{1 + \hat{E}^2}.$$

Berücksichtigen wir die Definition von D_{th} , so ergibt sich gerade

$$\frac{d\hat{E}}{d\tau} = \hat{E} \left(\frac{\hat{D}_0}{1 + \hat{E}^2} - 1 \right).$$

Hieraus lässt sich sehen, dass die Lösung $\hat{E} = 0$ für $\hat{D}_0 > 1$ instabil wird. In der Umgebung von $\hat{E} = 0$, d. h. für $|\hat{E}| \ll 1$, gilt nämlich näherungsweise

$$\frac{d\hat{E}}{d\tau} \approx \hat{E}(\hat{D}_0 - 1)$$

mit der Lösung

$$\hat{E}(t) = \hat{E}_0 \cdot e^{(\hat{D}_0 - 1)t}.$$

Dabei bezeichnet \hat{E}_0 die Größe einer anfänglichen Störung. Durch das exponentielle Anwachsen von \hat{E} wird natürlich irgendwann \hat{E}^2 nicht mehr vernachlässigbar gegenüber 1 und es setzt „Sättigung“ ein. Ob die Lösung $+\sqrt{\hat{D}_0 - 1}$ oder $-\sqrt{\hat{D}_0 - 1}$ erreicht wird, hängt vom Vorzeichen der zufälligen Größe \hat{E}_0 ab: es gibt eine „spontane Symmetriebrechung“. Für $\hat{D}_0 < 1$ wird die Anfangsstörung natürlich exponentiell gedämpft, und zwar um so langsamer, je näher \hat{D}_0 an der Schwelle $\hat{D}_0 = 1$ liegt.

Bei dem Wert $\hat{D}_0 = 1$ wird also die für $\hat{D}_0 < 1$ stabile (einzige) Lösung $\hat{E} = 0$ instabil

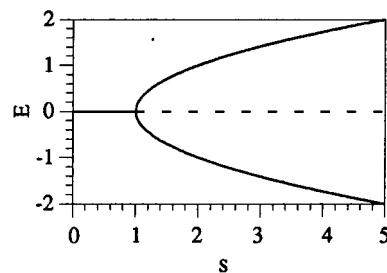


Abbildung 6: Zustandskurve eines Lasers. s entspricht \hat{D}_0 .

und es treten symmetrisch zwei neue Lösungen auf, die — wie wir gleich sehen werden — stabil sind. Dies ist in Abb. 6 dargestellt. Es handelt sich um eine typische Erscheinung in nichtlinearen Systemen, eine sogenannte „Pitchfork–Bifurkation“³².

Charakteristisch für eine Pitchfork–Bifurkation ist auch die wurzelförmige Abhängigkeit vom Kontrollparameter. Sie hat in diesem Fall zur Folge, dass \hat{E}^2 und damit die Laserleistung oberhalb der Laserschwelle linear mit dem Kontrollparameter (der „Pumprate“)

³²Pitchfork (engl.): Stimmgabel.

anwächst.

Auch das zeitliche Verhalten von \hat{E} lässt sich wieder mit Hilfe eines Potentials beschreiben:

$$\frac{d\hat{E}}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \hat{E}} \quad \text{mit} \quad U(\hat{D}_0) = \hat{E}^2 - \frac{1}{2}D_0 \cdot \log(1 + \hat{E}^2)$$

Abb. 7 macht deutlich, dass für $D_0 < 1$ das Potential bei $\hat{E} = 0$ ein Minimum besitzt, während für $D_0 > 1$ bei $\hat{E} = 0$ ein Maximum vorliegt, das von zwei symmetrischen Minima

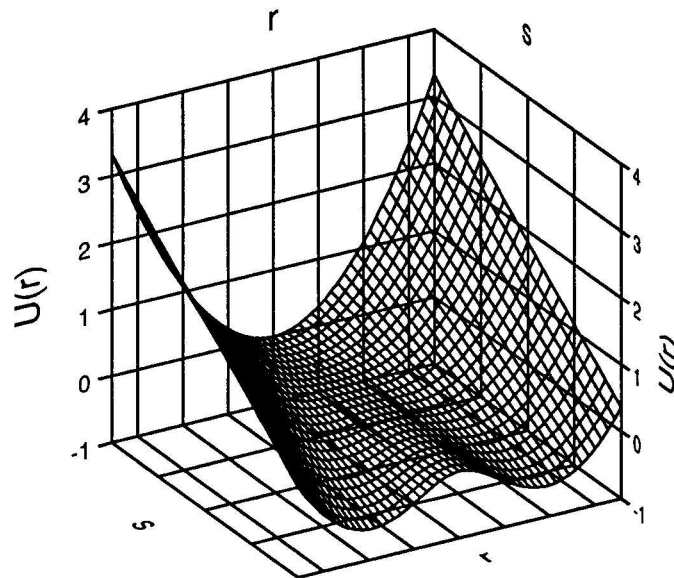


Abbildung 7: Potential U eines Lasers. Die Variable r , die Zustandsgröße, entspricht \hat{E} und der Kontrollparameter s entspricht \hat{D}_0 und damit der Pumprate, normiert auf die Schwellpumprate.

flankiert wird. Daraus folgt sofort, dass die Lösungen $\hat{E} = \pm\sqrt{\hat{D}_0 - 1}$ für alle Werte von \hat{D}_0 stabil sind. Diese Aussage lässt sich auch aus einem allgemeinen Prinzip herleiten: in einem dissipativen System streben alle Lösungen gegen sogenannte „Attraktoren“, wenn man lange genug wartet. Die einfachsten Attraktoren sind „Fixpunkte“, d. h. Punkte des Phasenraumes, in denen die zeitlichen Ableitungen der Zustandsgrößen verschwinden. Ist der Phasenraum eindimensional, so sind Fixpunkte die einzigen möglichen Attraktoren. Wenn die adiabatische Elimination von P und D möglich ist, so kann man das System in einem eindimensionalen Phasenraum beschreiben: E ist die entscheidende Größe³³. Die Folge ist, dass die Fixpunkte $\hat{E} = \pm\sqrt{\hat{D}_0 - 1}$ nur dadurch instabil werden könnten, dass neue Fixpunkte entstehen.

Laser, in denen man P und D adiabatisch eliminieren kann, zeigen deshalb ein besonders einfaches Verhalten. Man bezeichnet sie als „Klasse A-Laser“. Typischerweise gilt $\gamma_2 \gg \gamma_1, \gamma_2$. Man kann dann wenigstens P adiabatisch eliminieren und hat dann einen zweidimensionalen Phasenraum. Im Zweidimensionalen gibt es einen weiteren Typ von Attraktoren, die Grenzzykel. Dies sind geschlossene Kurven im Phasenraum, die einem

³³Man sagt auch, E sei der Ordnungsparameter.

periodischen Verhalten entsprechen. Die durch $\hat{E} = \pm\sqrt{D_0 - 1}$ beschriebenen Attraktoren könnten also im Prinzip instabil werden und durch einen Grenzzykel ersetzt werden. Es lässt sich jedoch durch eine sogenannte „lineare Stabilitätsanalyse der Fixpunkte“ (siehe unten) leicht zeigen, dass dieser Fall nicht eintritt. Schwieriger ist zu zeigen, dass neben den stabilen Fixpunkten nicht auch noch ein Grenzzykel existiert, der ein periodisches Verhalten der Laserleistung beschreiben würde. Im Fall $\gamma_1 \gg \kappa$ kann allerdings das transiente Verhalten, das zu den Fixpunkten $\hat{E} = \pm\sqrt{D_0 - 1}$ führt, relativ kompliziert sein: es tritt das Phänomen „Spiking“ auf. Laser, in denen $\gamma_2 \gg \gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$, aber nicht $\kappa \ll \gamma_1$, werden als „Laser der Klasse B“ bezeichnet. Alle anderen Laser gehören zur Klasse C.

Eine lineare Stabilitätsanalyse der Fixpunkte wird so durch geführt, dass man die Bewegungsgleichungen

$$dE/d\tau = f_1(E, P, D), \quad dP/d\tau = f_2(E, P, D), \quad dD/d\tau = f_3(E, P, D)$$

um die durch die Gln. (9) bis (11) definierten Fixpunkte in eine Taylorreihe entwickelt und die Entwicklung nach dem linearen Glied abbricht. Die stationären Lösungen werden im Folgenden als E_s, P_s und D_s bezeichnet. Definitionsgemäß gilt

$$f_1(E_s, P_s, D_s) = f_2(E_s, P_s, D_s) = f_3(E_s, P_s, D_s) = 0.$$

In der Umgebung der Fixpunkte (E_s, P_s, D_s) gilt also

$$dE/d\tau = \partial f_1/\partial E \cdot (E - E_s) + \partial f_1/\partial P \cdot (P - P_s) + \partial f_1/\partial D \cdot (D - D_s)$$

$$dP/d\tau = \partial f_2/\partial E \cdot (E - E_s) + \partial f_2/\partial P \cdot (P - P_s) + \partial f_2/\partial D \cdot (D - D_s)$$

$$dD/d\tau = \partial f_3/\partial E \cdot (E - E_s) + \partial f_3/\partial P \cdot (P - P_s) + \partial f_3/\partial D \cdot (D - D_s).$$

Die partiellen Ableitungen sind jeweils an der Stelle (E_s, P_s, D_s) zu berechnen. Die DGLn. lassen sich schreiben als

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} E \\ P \\ D \end{pmatrix} = \hat{J} \cdot \begin{pmatrix} E - E_s \\ P - P_s \\ D - D_s \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial E & \partial f_1/\partial P & \partial f_1/\partial D \\ \partial f_2/\partial E & \partial f_2/\partial P & \partial f_2/\partial D \\ \partial f_3/\partial E & \partial f_3/\partial P & \partial f_3/\partial D \end{pmatrix}.$$

Das jetzt entstandene System von *linearen* DGLn. kann nach Standardverfahren gelöst werden. Man bestimmt dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren. Um festzustellen, ob die stationäre Lösung instabil werden kann, reicht es aus, die drei Eigenwerte der Jacobi-Matrix zu bestimmen: sobald einer von ihnen einen positiven Realteil besitzt, ist die stationäre Lösung (E_s, P_s, D_s) instabil, da eine kleine Abweichung ja (zunächst) exponentiell anwachsen würde. Eine derartige Analyse ergibt, dass die stationäre Lösung instabil wird, wenn

$$\kappa > \gamma_1 + \gamma_2$$

und außerdem

$$\hat{D}_0 - 1 > \frac{(\kappa + \gamma_1 + \gamma_2)(\kappa + \gamma_2)}{(\kappa - \gamma_1 - \gamma_2) \cdot \gamma_2}.$$

Die erste Bedingung kann nur in Lasern der Klasse C erfüllt sein. Die 2. Bedingung wird als „2. Laserschwelle“ bezeichnet. Diese Schwelle, bei der die stationäre Laseremission instabil wird, liegt in dem hier behandelten Lasermodell weit oberhalb der „1. Laserschwelle“, bei der die Laseremission einsetzt. Sie kann — auch deshalb, weil der Laser stark verlustbehaftet sein muss, um κ hinreichend groß zu machen — im allgemeinen nicht erreicht werden.

Die Existenz einer 2. Laserschwelle hat große Beachtung gefunden, weil die Erfahrung zeigt, dass die meisten Laser instabil werden, wenn die Pumprate die 1. Laserschwelle weit überschreitet. Bei manchen Lasern geschieht dies allerdings bereits dicht oberhalb der 1. Laserschwelle. Die Ursache für diesen scheinbaren Widerspruch liegt darin, dass das durch die Gln. (6) bis (8) beschriebene Lasermodell zu grob ist: ein realer Laser arbeitet z. B. nicht mit ebenen Wellen, sondern mit einem Gaußschen Strahl und es können höhere transversale Moden anschwingen. Besonders niedrig liegt die Schwelle für das Auftreten von Instabilitäten selbst innerhalb der TEM_{00} -Mode, wenn das Lasermedium eine inhomogene Verbreiterung besitzt.

Das Auftreten der 2. Laserschwelle ist aber auch von grundsätzlicher Bedeutung. Sie kann nur auftreten, wenn sich der Phasenraum nicht auf einen zweidimensionalen Raum reduzieren lässt. In dreidimensionalen Phasenräumen gibt es aber weitere Attraktortypen. Sie haben als *chaotische Attraktoren* viel Beachtung gefunden. Einer der bekanntesten chao-

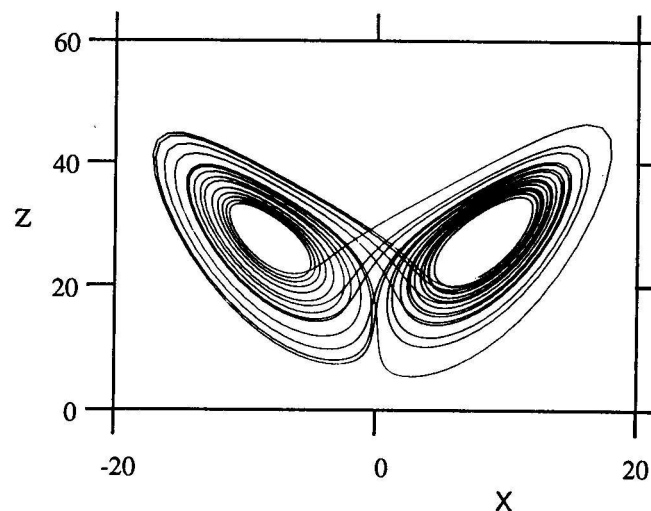


Abbildung 8: Phasenporträt des Lorenz-Attraktors, projiziert in eine Ebene.

tischen Attraktoren ist der *Lorenzattraktor*. Er beschreibt das Langzeitverhalten eines Systems von drei nichtlinearen DGLn., die Lorenz zur stark vereinfachten Beschreibung von Atmosphärenverhalten aufgestellt hat. Lorenz konnte zur allgemeinen Überraschung zeigen, dass seine rein deterministischen Gln. keine gesicherte Aussage über das Langzeitverhalten zulassen, da kleinste Abweichungen von den rechnerischen Anfangsbedingungen zu einem exponentiellen Anwachsen der Abstände zwischen benachbarten *Trajektorien* im

Phasenraum führen. (Die gleiche Wirkung haben die bei numerischen Rechnungen unvermeidlichen Fehler auf Grund der endlichen numerischen Genauigkeit.) Haken hat zeigen können, dass die Maxwell–Bloch–Gln. sich in die von Lorenz abgeleiteten Gln. transformieren lassen. Das bedeutet, dass in entsprechenden Parameterbereichen auch beim Laser ein Lorenzattraktor auftreten muss. Wegen des Interesses an chaotischen Attraktoren wurde deshalb für das hier vorgestellte Lasersmodell die Bezeichnung *Haken–Lorenz–Modell* geprägt³⁴.

Ein typisches Bild des Lorenzattraktors ist in Abb. 8 gezeigt. Typisch ist, dass die Trajektorie spiralartig um ein Zentrum (einen instabilen Fixpunkt) umläuft, bevor sie zu spiralartigem Verhalten um das zweite Zentrum überwechselt. Bei der Laseremission muss daher ein Pulsen mit langsam veränderlicher Amplitude auftreten, das in unregelmäßigen

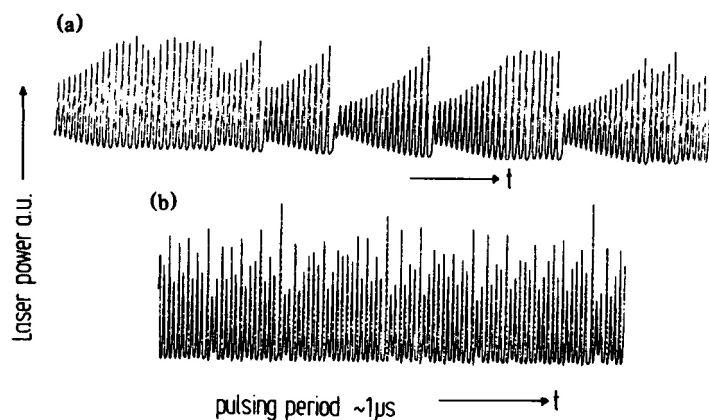


Abbildung 9: Chaotisches Zeitverhalten der Intensität eines Ferninfrarotlasers.

Abständen von abrupten Amplitudenänderungen unterbrochen ist. Diese treten auf, wenn die Trajektorie von einem zum anderen Zentrum überwechselt. In einem speziell präparierten Ferninfrarotlaser ist experimentell ein Verhalten beobachtet worden, das dem für den Lorenzattraktor erwarteten Verhalten sehr ähnlich ist Abb. 9. Es sei noch erwähnt, dass die Maxwell–Bloch–Gln. sich auf den nichtresonanten Fall erweitern lassen. Da in diesem Fall Real- und Imaginärteil von E und von P auftreten, erhalten wir im Prinzip einen fünfdimensionalen Phasenraum und dementsprechend ein noch komplexeres Verhalten. Schließlich sei noch erwähnt, dass auch bei der optischen Bistabilität verschiedene Instabilitäten auftreten können und auch experimentell nachgewiesen worden sind.

³⁴Es finden sich auch Bezeichnungen wie Haken–Lorenz–Lugiato–Modell.