

4 Transiente Phänomene

4.1 Zeitabhängige Lösung der Blochschen Gleichungen

4.1.1 Rabioszillationen und optische Nutation

In Abschnitt 3.2 und 3.3 haben wir die stationären Lösungen für den Blochvektor angegeben; tatsächlich kann man für den Fall, dass ein Feld konstanter Amplitude zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird, auch die zeitabhängigen Lösungen analytisch angeben, doch sind diese sehr kompliziert. Schon für den relativ einfachen Fall, dass ein Laserpuls durch Amplitudenmodulation einer Trägerwelle zustande kommt

$$E(t) = \mathcal{E}(t) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

sind analytische Lösungen nicht möglich.

Ist der Puls kurz gegenüber den Relaxationszeiten, so kann man die "ungedämpften Blochschen Gln." behandeln. Diese lauten

$$\frac{d}{dt} \vec{B} = \vec{\Omega} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \Omega = (-\kappa \mathcal{E}, 0, \Delta) \quad (1)$$

Hier ist $\Delta = \omega_0 - \omega$ und ω_0 die Resonanzfrequenz. κ ist eine Koppelkonstante, die das Dipolmatrixelement enthält. Selbst in diesem Fall sind analytische Lösungen nur in zwei Spezialfällen möglich.

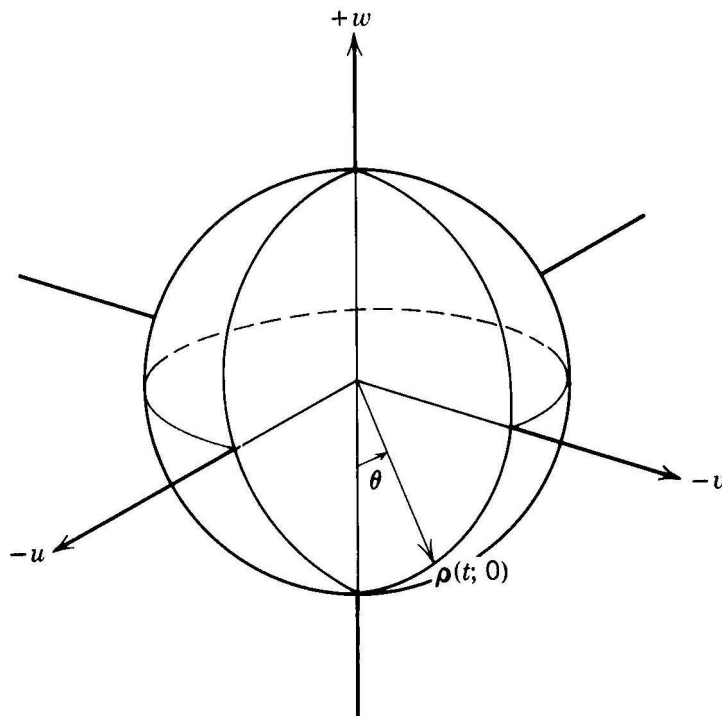


Abbildung 1: Einheitskugel mit Blochvektor (hier als ρ bezeichnet)

1. Spezialfall: resonante Einstrahlung $\Delta = 0$

In diesem Fall liegt Ω konstant in Richtung der u -Achse und verändert lediglich seine Länge. \vec{B} rotiert also mit variierender Winkelgeschwindigkeit um die u -Achse ($u = \text{const.}$). Es ist zweckmäßig die "Pulsfläche"

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \kappa \cdot \mathcal{E}(t') dt' \quad (2)$$

einzuführen. Die Lsg. lautet dann

$$u(t, \Delta = 0) = u_0 \quad (3a)$$

$$v(t, \Delta = 0) = w_0 \sin \Theta + v_0 \cos \Theta \quad (3b)$$

$$w(t, \Delta = 0) = -v_0 \sin \Theta + w_0 \cos \Theta. \quad (3c)$$

Dabei stellen $u_0 = u(-\infty)$, $v_0 = v(-\infty)$ und $w_0 = w(-\infty)$ die Anfangsbedingungen dar.

Interessant ist der Fall $\theta = \pi$ (" π -Puls"). Er hat offenbar die Eigenschaft, den Vektor $\vec{B} = (u_0, v_0, w_0)$ in den Vektor $\vec{B}' = (u_0, -v_0, -w_0)$ zu überführen, also eine 180° -Drehung um die u -Achse durchzuführen (Inversion innerhalb der Ebene $u = \text{const.}$). Lautet die Anfangsbedingung $u_0 = v_0 = 0, w_0 = -1$ (alle Teilchen im Grundzustand), so überführt ein π -Puls alle Teilchen in den angeregten Zustand. Unter den gleichen Voraussetzungen erzeugt ein $\pi/2$ -Puls Gleichbesetzung ($w = 0$), erzeugt jedoch maximale Kohärenz ($u = 0, |v| = 1$).

2. Spezialfall, Δ beliebig, $\mathcal{E}(t) = 0$ für $t < 0$, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0$ für $t \geq 0$

In diesem Fall präzediert \vec{B} mit der Winkelgeschwindigkeit

$$|\Omega| = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_0^2}$$

($\Omega_0 = |\kappa \mathcal{E}_0|$) um $\vec{\Omega}$. $|\Omega|$ wird "verallgemeinerte Rabi-Frequenz" genannt.)

$$\vec{B}(t, \Delta) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_0 + \Delta^2 \cos \Omega t}{\Omega^2} & -\frac{\Delta}{\Omega} \sin \Omega t & -\frac{\Omega_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) \\ \frac{\Delta}{\Omega} \sin \Omega t & \cos \Omega t & \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \Omega t \\ -\frac{\Delta \cdot \Omega_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) & -\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \Omega t & \frac{\Delta^2 + \Omega_0^2 \cos \Omega t}{\Omega^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ergibt sich im Fall $u_0 = v_0 = 0, w_0 = -1$:

$$w(t, \Delta) = -1 + \frac{2\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \Delta^2} \sin(\Omega t/2).$$

Die "Rabioszillationen" der Inversion erfolgen also im Fall $\Delta \neq 0$ schneller als im Resonanzfall, führen aber nicht so weit vom "Südpol" der Einheitskugel ($u = v = 0, w = -1$) fort. Die periodische Variation von w bezeichnet man auch als "optische Nutation".¹⁷ Sie läßt sich experimentell nachweisen, da sie mit einer periodischen Variation der Absorption

¹⁷Es sei daran erinnert, dass \vec{B} in einem mit ω rotierenden Koordinatensystem definiert ist. Genaugenommen führt also der Pseudospin *im Laborsystem* eine Nutationsbewegung durch.

verbunden ist.

Die Ergebnisse für w haben offenbar nichts gemeinsam mit dem Verhalten, das man mit Rotengleichungen erhält. Diese sind deshalb im Prinzip zur Beschreibung der Wechselwirkung von Atomen mit *kohärentem* Licht völlig ungeeignet!

Mit Berücksichtigung der Relaxation kann man natürlich leicht numerische Lösungen der Blochschen Gleichungen bestimmen und findet dann, dass die Rabioszillationen in der Zeit T_1 bzw. T_2 ausgedämpft werden. Im allgemeinen ist $T_2 \ll T_1$.

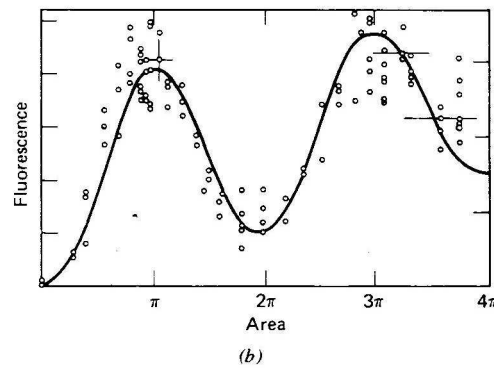
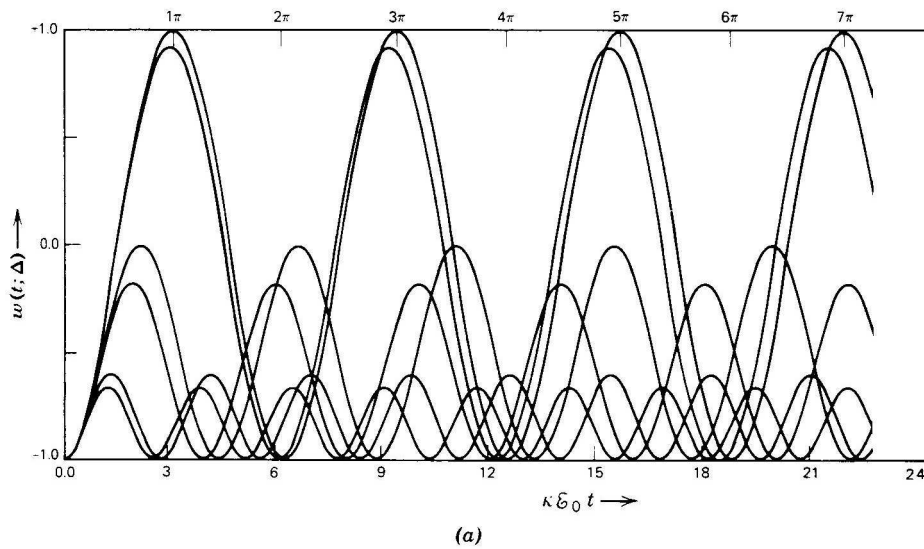


Abbildung 2: (a) Zeitverhalten der Inversion für verschiedene Verstimmungen. (b) Experimentelles Ergebnis für verschiedene Pulsflächen. Die Fluoreszenz ist ein Maß für die Besetzung des angeregten Zustandes.

4.1.2 "Adiabatic following" und "Adiabatic Rapid Passage"

Die Lösung der (gedämpften oder ungedämpften) Blochschen Gln. ist häufig mit der Näherung des "Adiabatic following" möglich. Wenn $|\vec{\Omega}|$ groß ist und $\vec{\Omega}$ seine Richtung nur langsam ändert, so kann man annehmen, dass der Blochvektor schnell um $\vec{\Omega}$ präzediert und dabei der langsamen Richtungsänderung von $\vec{\Omega}$ folgt. Formale Voraussetzung dafür

ist

$$\left| \frac{d}{dt} \vec{\Omega} \right| \ll |\vec{\Omega}|.$$

Im allgemeinen ist die Näherung zulässig, wenn man weit genug außerhalb der Resonanz ist (wegen $|\vec{\Omega}| \rightarrow |\Delta|$ für $|\Omega/\Delta| \rightarrow 0$).

Mit der Vorstellung des "adiab. following" kann man viele Probleme semiquantitativ behandeln, z. B. Selbstfokussierungs- und Defokussierungseffekte (siehe Kap. 6). Die wichtigste Anwendung ist aber die "adiabatische Inversion". (Hier gilt Näherung nicht streng.)

Man startet bei $w = -1$, und \vec{B} ist fast parallel zu $\vec{\Omega}$, weil $\Delta \ll 0$, z. B. $\Delta = -10/T_2$. Dann wird Ω adiabatisch in die Vertikale gedreht, indem Δ durch 0 nach $+10/T_2$ variiert wird. Wenn dabei \vec{B} adiabatisch folgt, dann hat man eine Inversion durch Lichteinstrahlung im Zweiniveausystem. Wenn die Teilchen eine Geschwindigkeit besitzen, so "sehen" sie etwas andere Werte von Δ , verhalten sich aber genauso. Es ergibt sich also Inversion für *alle* Geschwindigkeitsklassen! Das Experiment ist von Loy durchgeführt worden, indem — Analogie zur Stark-switching-Technik — nicht die Laserfrequenz sondern ω_0 variiert wurde (M.M.T. Loy, Phys. Rev. Lett. **32**, 814 (1974)).

Die Betrachtungsweise läßt sich auf mehrere Niveaus und mehrere Laserfelder verallgemeinern. Es entstehen dann Phänomene wie "STIRAP" (stimulated Raman adiabatic passage)¹⁸.

Die Technik, durch passende Wahl des Verlaufs von Amplitude und Frequenz eines Pulses, ganz bestimmte Prozesse gezielt ablaufen zu lassen, wird als "Coherent Control" bezeichnet. Sie ist in den letzten Jahren auf sehr viele Prozesse angewandt worden. Zum Beispiel läßt sich dadurch erreichen, dass laserinduzierte chemische Prozesse in bestimmter Richtung ablaufen¹⁹.

Die passende Einrichtung von Pulsen wird inzwischen bis in den Femtosekundenbereich gut beherrscht²⁰ und neuerdings bei Untersuchungen von Prozessen in der Halbleiterphysik viel eingesetzt²¹.

4.1.3 "Free Induction Decay"

Wird das treibende Feld zum Zeitpunkt $t = T$ plötzlich ausgeschaltet, so relaxiert w mit der Zeitkonstante T_1 gegen w_{th} und u und v relaxieren mit der Zeitkonstante T_2 gegen Null. Es sei daran erinnert, dass — bis auf einen Phasenfaktor —

$$\rho_{12}(T) = \frac{1}{2}(u(T) + iv(T))$$

und

$$\rho_{12}(T + t) = \rho_{12}(T) \cdot e^{+(i\omega_0 - \Gamma_2)t}.$$

¹⁸Ein Überblick findet sich bei K. Bergmann et al., Coherent populationtransfer among quantum states of atoms and molecules, Rev. Mod. Phys. **70**, 1003 (1998)

¹⁹M. Shapiro et al., Coherent control of molecular dynamics. Rep. Progr. Phys. **66**, 859 (2003)

²⁰D. Goswami: Optical pulse shaping approaches to coherent control. Phys. Rep. **374**, 385 (2003)

²¹Siehe auch V.M. Axt, T. Kuhn: Femtosecond spectroscopy in semiconductors: a key to coherences correlations and quantum kinetics. Rep. Progr. Phys. **67**, 433 (2004).

In einem kleinen Volumenelement ist daher nach Abschalten des Feldes eine Polarisation vorhanden, die mit ω_0 oszilliert. Dies führt zur Abstrahlung eines Feldes mit der Frequenz ω_0 . Die Phase in den einzelnen Volumenelementen ist durch das ursprünglich vorhandene Feld festgelegt worden, d. h. es hat sich ein "phased array" ausgebildet. Daher überlagern sich die Felder in Vorwärtsrichtung konstruktiv, in transversaler Richtung jedoch statistisch. Die in Vorwärtsrichtung abgestrahlte Leistung geht daher mit N^2 , die in transversale Richtung abgestrahlte nur mit N (N Zahl der Atome).

Bei der NMR entspricht $\rho_{12} \neq 0$ der Existenz eines oszillierenden transversalen magnetischen Momentes. Dieses ruft in einer Probespule ein Induktionssignal hervor, das schnell abklingt ("Free Induction Decay" = FID). Man spricht auch in der Optik von FID-Signalen. Sie lassen sich am besten als Heterodynsignal nachweisen, indem man sie auf einem Detektor mit einem Laser der Frequenz ω mischt. Experimentell lassen sich die optische Nutation und die FID-Signale am besten an (polaren) Molekülen nachweisen, indem nicht der Laser geschaltet wird, sondern die Resonanzfrequenz der Moleküle durch ein (statisches) elektrisches Feld verschoben wird. Man findet dann in einem dopplerverbreiterten Medium ein FID-Signal von der Geschwindigkeitsklasse, die nicht mehr in Resonanz mit dem Laser ist; mit dem weiterhin eingestrahlten Laser ergibt sich dann unvermeidlich das genannte Heterodynsignal. Dem FID-Signal überlagert ist das Nutationssignal von der Geschwindigkeitsklasse, die in Resonanz geschaltet worden ist. Zu beachten ist, dass das FID-Signal im Falle einer *inhomogenen* Verbreiterung sehr viel schneller abklingt als der "Phasenrelaxationszeit" T_2 des einzelnen Teilchens entspricht, da die oszillierenden Signale verschiedener Frequenz sich bereits nach kurzer Zeit wegmitteln.

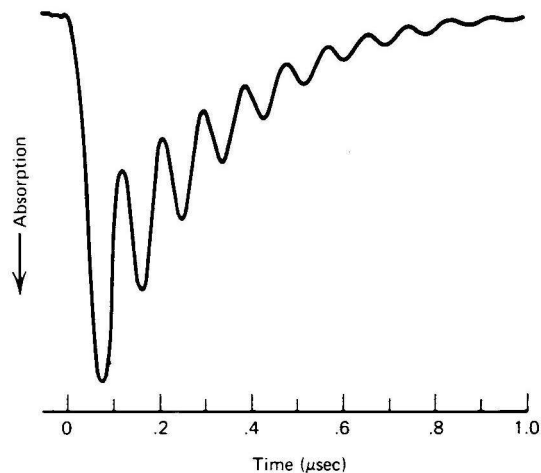


Abbildung 3: Experimentelles FID-Signal an NH_2D nach sprunghafter Änderung eines elektrischen Feldes ("Stark switching"). Lichtquelle ist ein CO_2 -Laser bei $10,6\mu$ Wellenlänge.

4.1.4 Photonenechos

Das schnelle Zerfallen des FID-Signales im Falle einer inhomogenen Verbreiterung ist voll deterministisch. Im Prinzip müßte es daher möglich sein, den Vorgang rückgängig zu machen.

Wir nehmen im Folgenden an, die Frequenz eines Überganges ohne inhomogene Verbreiterung sei ω_0 . Durch inhomogene Verbreiterung ergibt sich für die n -te Klasse von Teilchen eine Resonanzfrequenz $\omega_0 + \Delta\omega_n$ ($|\Delta\omega_n| \ll \omega_0$). Der Blochvektor sei in einem mit ω_0 definierten System definiert. Ein resonanter $\pi/2$ -Puls zum Zeitpunkt $t = 0$ klappt den Blochvektor, der ursprünglich zum Südpol zeigt, in die Äquatorialebene ($u = 0, v = 1, w = 0$). Anschließend dreht sich der Blochvektor der n -ten Teilchenklasse in dieser Ebene um die ω -Achse und zwar in der Zeit T um den Winkel $\delta_n = \Delta\omega_n \cdot T$. Wird zum Zeitpunkt T ein resonanter π -Puls eingestrahlt, so wird der Blochvektor für alle Teilchenklassen um 180° um die u -Achse gedreht. Aus dem Winkel δ_n gegen die v -Achse wird dabei ein Winkel $180^\circ - \delta_n$. Zum Zeitpunkt $t = 2 \cdot T$ ist hieraus — unabhängig von $\Delta\omega_n$ — ein Winkel von 180° geworden: die Blochvektoren aller Teilchenklassen fallen wieder zusammen und es tritt deshalb zum Zeitpunkt $2T$ ein Analogon zum FID-Signal auf. Dieses wird in der NMR-Spektroskopie als "Spinecho" und in der Optik als "Photonenecho" bezeichnet.

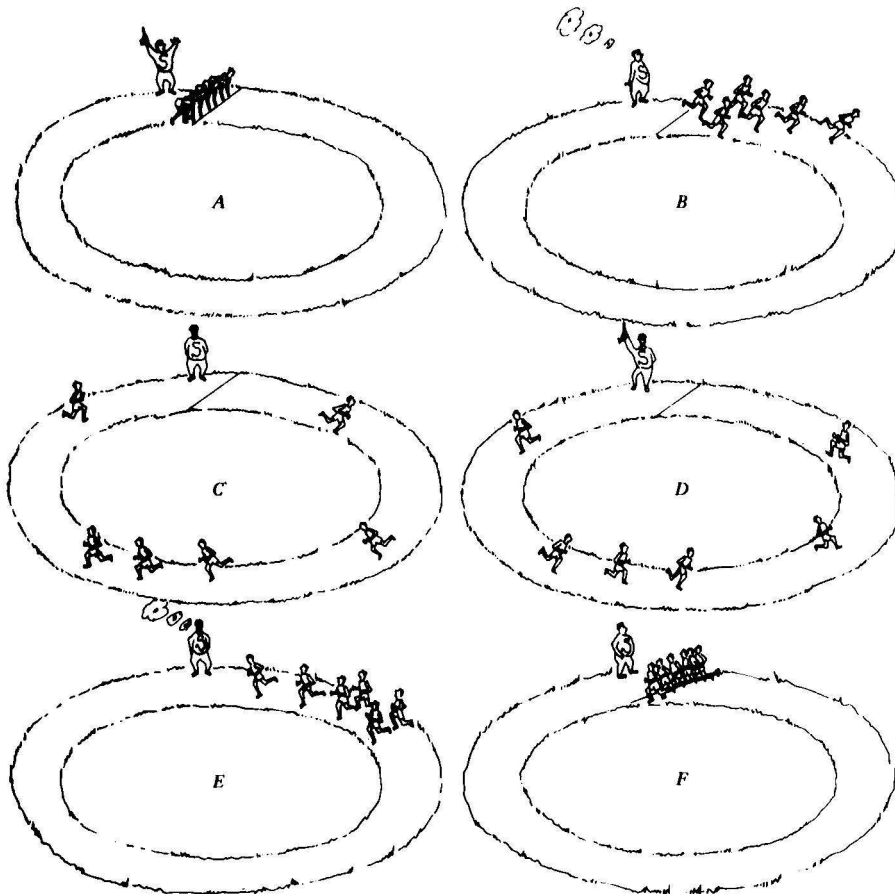


Abbildung 4: Veranschaulichung der Vorgänge beim Spin- bzw. Photonenecho. (Titelblatt von Physics Today, November 1953)

4.2 Ausbreitung kurzer Pulse

4.2.1 Selbstphasenmodulation

Angenommen der Brechungsindex eines Mediums variere linear mit der Intensität ("Kerr-Medium")

$$n = n_0 + n_2 \cdot I. \quad (4)$$

Die Intensität eines Pulses der Trägerfrequenz ω_0 besitze die Zeitabhängigkeit $I(t)$. Nach Durchlaufen einer Strecke L des Mediums tritt eine Phasenverzögerung

$$\phi(L) = -k \cdot L = -\frac{\omega_0}{c} [n_0 + n_2 \cdot I(t)] \cdot L$$

auf. An dieser Stelle des Mediums ist deshalb die scheinbare Momentanfrequenz

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega(t)$$

mit

$$\Delta\omega(t) = \partial\phi(L)/\partial t = -n_2 \cdot \frac{\omega_0 L}{c} \cdot \frac{dI}{dt} \quad (5)$$

Im Fall $n_2 > 0$ erscheint daher die ansteigende Flanke des Impulses rotverschoben, die abfallende blauverschoben²². Der Puls besitzt dann einen "Chirp" (to chirp – zwitschern). Ein anfangs fourierlimitierter Puls bleibt bei dieser "Selbstphasenmodulation" offenbar nicht fourierlimitiert. Durch die Selbstphasenmodulation kann das Spektrum kurzer Pulse stark verbreitert werden. Das verbreiterte Spektrum würde im Prinzip kürzere (fourierlimitierte) Pulse zulassen. Man muß dazu lediglich den rotverschobenen Anfang des Pulses gegenüber dem blauverschobenen Ende so verzögern, dass sie mehr oder weniger zusammenfallen. Dies kann z. B. mit einer Kombination parallel angeordneter Beugungsgitter geschehen (s. Abb. 5). Pulse lassen sich auf diese Weise stark verkürzen ("Pulskompression").

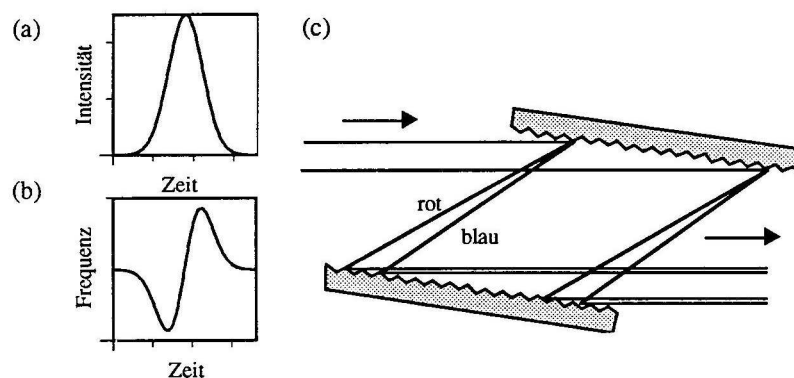


Abbildung 5: (a) Intensitätsverlauf eines Laserpulses, schematisch; (b) Zeitableitung der Phase eines Lichtfeldes ("Momentanfrequenz") am Ausgang eines Kerrmediums; (c) Gitteranordnung zur Pulskompression.

²²Wir vernachlässigen zunächst die Rolle der (linearen) Dispersion.

4.2.2 Solitonen und die "nichtlineare Schrödinger-Gleichung"

Durchläuft ein Puls mit dem obengenannten Chirp eine Glasfaser, so wird — im Fall der üblichen positiven Dispersion der Gruppengeschwindigkeit — der blauverschobene "tail" noch weiter gegenüber dem rotverschobenen Anfang zurückbleiben: der Puls läuft zeitlich auseinander. Ist allerdings die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit negativ ($\beta = \frac{d^2k}{d\omega^2} < 0$), so kann mit einer Glasfaser eine Pulskompression erreicht werden ("self-steepening"). Bei Glasfasern ist dies bei $\lambda > 1,3\mu$ möglich.

Schickt man einen kurzen intensiven Puls in eine Glasfaser mit $\beta < 0$, so tritt gleichzeitig Selbstphasenmodulation und Dispersion auf. Am Anfang des Pulses werden auf Grund der Nichtlinearität ständig neue rotverschobene Frequenzen und am Ende blauverschobene erzeugt; die Dispersion ($\beta < 0$) sorgt für eine Verzögerung der roten und eine Beschleunigung der blauen Frequenzanteile relativ zu der "Mittelfrequenz" ω_0 . Es zeigt sich, dass bei Pulsen bestimmter Form und Amplitude die beiden Effekte sich gegenseitig kompensieren können: der Puls durchläuft das (dispersive !) Medium dann formstabil. Man bezeichnet einen derartigen Puls als Soliton.

Formal gilt in Glasfasern in guter Näherung die sogenannte (eindimensionale) "nichtlineare Schrödinger-Gleichung" (NLS-Gl.). Von dieser Gleichung, die an verschiedenen Stellen in der Physik auftritt, ist gut bekannt, dass sie Solitonenlösungen besitzt.

Ableitung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung²³

Die Ausbreitung von Licht in einem nichtlinearen Medium wird beschrieben durch die nichtlineare Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{NL} \quad (6)$$

Dabei bezeichnet $P^{(1)}$ den linearen und P^{NL} den nichtlinearen Anteil der Polarisation. Wir wollen annehmen, das Medium sei ein "Kerr-Medium", d. h. es gelte für den Brechungsindex

$$n = n_0 + n_2 I .$$

Dabei ist $n_0 = n_0(\omega)$ der (frequenzabhängige) lineare Brechungsindex; n_2 werde als frequenzunabhängig angenommen; I ist die Intensität. Im absorptionsfreien Fall, den wir voraussetzen wollen, gilt

$$n_0^2 = 1 + \chi^{(1)}$$

und deshalb für jede Frequenzkomponente $P_\omega^{(1)}$ von $P^{(1)}$

$$P_\omega^{(1)} = \varepsilon_0 \cdot (n_0^2(\omega) - 1) \cdot E_\omega ;$$

hier ist E_ω die Fourierkomponente von E bei der Frequenz ω . Im Fall $|n_2 I| \ll n_0$ gilt

$$n^2 - 1 \approx n_0^2 - 1 + 2n_0 n_2 I .$$

²³Eine anspruchsvolle Ableitung der NLS-Gleichung findet sich bei Moloney und Newell, *Nonlinear Optics*, Addison Wesley 1992. Eine knappe Ableitung geben Kivshar und Agrawal ("*Optical Solitons*", Academic Press 2003).

Für einen Puls mit der Trägerfrequenz ω_0 , der nur Frequenzkomponenten in der Umgebung von ω_0 enthält, können wir deshalb schreiben

$$P^{NL} \approx \varepsilon_0 \cdot 2n_0n_2 \cdot I \cdot E .$$

Wir interessieren uns zunächst für ein *eindimensionales* Ausbreitungsproblem, d. h. $\frac{\partial}{\partial x} E = \frac{\partial}{\partial y} E = 0$ und setzen an

$$E = \tilde{E}(z, t) \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)} .$$

Dabei enthält \tilde{E} nur niedrige Frequenzkomponenten. Es ist üblich, anstelle von E eine zu E proportionale Größe E' zu benutzen, für die gilt

$$I = |\tilde{E}'(z, t)|^2 .$$

Dies soll auch hier geschehen, doch wird das Zeichen "''" im folgenden unterdrückt.

Wenn das in $\tilde{E}(z, t)$ enthaltene Frequenzband schmal genug ist²⁴, gilt näherungsweise

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [|\tilde{E}(z, t)|^2 \tilde{E}(z, t) \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)}] = -\omega_0^2 \cdot |\tilde{E}(z, t)|^2 \cdot \tilde{E}(z, t) \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)}$$

bzw.

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{NL} \approx -2n_2 \cdot n_0(\omega_0) \cdot \frac{\omega_0^2}{c^2} \cdot |\tilde{E}(z, t)|^2 \cdot \tilde{E}(z, t) \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)} .$$

Mit $k_0 = n_0(\omega_0) \cdot \omega_0/c$ und $\gamma = \frac{n_2}{n_0(\omega_0)} \cdot k_0$ erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t} P^{NL} \approx -2\gamma k_0 \cdot |\tilde{E}(z, t)|^2 \cdot \tilde{E}(z, t) \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)} . \quad (7)$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die linke Seite von Gl. (6) linear ist. Deshalb ist es zweckmäßig, zu Fourierkomponenten überzugehen. Die linke Seite der Gleichung wird jetzt in einer Weise umgeformt, die auch bei der Behandlung der linearen Pulsausbreitung üblich ist. Die mit ω oszillierende Fourierkomponente $E_\omega(z, t)$ von $E(z, t)$ hat die Form

$$E_\omega(z, t) = \tilde{E}_\omega(z, t) \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)} = \tilde{E}_\omega(z) \cdot e^{-i(\omega - \omega_0)t} \cdot e^{i(k_0z - \omega_0t)} .$$

Sie ruft die Frequenzkomponente

$$P_\omega^{(1)}(z, t) = \varepsilon_0(n_0^2(\omega) - 1) \cdot E_\omega(z, t)$$

der linearen Polarisation hervor, so dass

$$-\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_\omega(z, t) - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_\omega^{(1)}(z, t) = n_0^2(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot E_\omega(z, t) = k^2 \cdot E_\omega(z, t) ;$$

$k = n_0(\omega)\omega/c$ ist die Wellenzahl der linearen Optik. Die linke Seite von Gl. (6) lässt sich also für jede Fourierkomponente von $E(z, t)$ ersetzen durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^2} + k^2 \right) E_\omega(z, t) .$$

²⁴Die Bedingung lautet $\left| \frac{\partial}{\partial t} (|\tilde{E}|^2 \cdot \tilde{E}) \right| \ll \omega_0$. Die Vernachlässigung der zeitlichen Ableitung ist gerechtfertigt, solange die rechte Seite von Gl. (6) ohnehin nur einen kleinen Korrekturterm darstellt.

Andererseits gilt für hinreichend schmalbandige $E(z, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E \approx \left(-k_0^2 \tilde{E}(z, t) + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}(z, t) \right) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} .$$

Daher kann man die linke Seite von Gl. (6) umformen zu

$$e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \cdot \left(k^2 - k_0^2 + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{E}_\omega(z, t) .$$

$k^2 - k_0^2$ können wir unter der Voraussetzung des schmalbandigen Feldes annähern durch $2k_0 \cdot (k - k_0)$. $k = k(\omega)$ werde jetzt an der Stelle ω_0 in eine Fourierreihe entwickelt:

$$k = k_0 + \frac{dk}{d\omega} \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (8)$$

Wir definieren

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v_g} \quad (v_g \text{ Gruppengeschwindigkeit}),$$

$$\frac{d^2 k}{d\omega^2} = \beta .$$

(Die Größe β wird häufig etwas ungenau als "Dispersion der Gruppengeschwindigkeit" bezeichnet.)

Wir verwenden jetzt die Beziehung

$$k - k_0 = \frac{1}{v_g} \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta \cdot (\omega - \omega_0)^2$$

als "Dispersionsrelation". Berücksichtigen wir noch

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{E}_\omega(z, t) = -i(\omega - \omega_0) \cdot \tilde{E}_\omega(z, t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{E}_\omega(z, t) = -(\omega - \omega_0)^2 \cdot \tilde{E}_\omega(z, t) ,$$

so geht die linke Seite von Gl. (6) über in

$$e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} 2k_0 \cdot \left(i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{v_g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{E}_\omega(z, t)$$

Da dies für alle Fourierkomponenten gilt, aus denen $E(z, t)$ aufgebaut ist, können wir für beliebige (hinreichend schmalbandige) $E(z, t)$ die entsprechende Ersetzung vornehmen, in der $\tilde{E}(z, t)$ an Stelle von $\tilde{E}_\omega(z, t)$ steht. Damit ist die Gl. (6) mit dem Näherungsausdruck von Gl. (7) äquivalent zu der DGL

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{v_g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \cdot |\tilde{E}|^2 \right\} \tilde{E} = 0 \quad (9)$$

für die Amplitudenfunktion $\tilde{E}(z, t)$.

Daraus ergibt sich mit der Substitution

$$T = t - z/v_g$$

(Einführung einer retardierten Zeit, d. h. Übergang in mitbewegtes System)²⁵ die nicht-lineare Schrödinger-Gl. (NLS-Gl.)²⁶:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = -i \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial T^2} + i\gamma \cdot |\tilde{E}|^2 \tilde{E} . \quad (10)$$

(Der Name ist natürlich gewählt, weil die Gl. im Fall $\gamma = 0$ dieselbe mathematische Struktur hat wie die Schrödinger-Gl. für ein Teilchen im Potential $V = \text{const.}$)

Zusammenfassung der Ableitung:

- (1) Für die Ausbreitung eines optischen Pulses

$$E(z, t) = \tilde{E}(z, t) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

lässt sich die nichtlineare Wellengl.

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} E - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{NL}$$

näherungsweise umformen in

$$2k_0 \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \cdot \left\{ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \tilde{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{NL} .$$

- (2) In einem Kerrmedium gilt näherungsweise

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^{NL} = -2\gamma k_0 |\tilde{E}|^2 \tilde{E} \cdot e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} .$$

- (3) Daraus folgt unmittelbar

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma |\tilde{E}|^2 \right\} \tilde{E} = 0 .$$

²⁵Bei der Umformung ersetzt man $\tilde{E}(z, t)$ durch $\tilde{E}_r(z, T)$ mit der Konsequenz

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial z} - \frac{1}{v_g} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial T}$$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} = \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial t}$$

Der Index "r" ist im folgenden unterdrückt.

²⁶Auch Gl. (9) wird als NLS-Gl. bezeichnet.

Alternativer Gedankengang:

- (1) Die Wellengleichung führt für die Frequenzkomponente \tilde{E}_ω von \tilde{E} auf die Gleichung

$$\left\{ k - k_0 + i \frac{\partial}{\partial z} \right\} \tilde{E}_\omega = 0$$

- (2) Im linearen Fall gilt die Dispersionsrelation

$$k(\omega) - k_0 = \frac{i}{v_g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

In einem Kerrmedium ist $k(\omega)$ durch $k(\omega, |\tilde{E}|^2)$ zu ersetzen. Die Dispersionsrelation lautet jetzt

$$k(\omega, |\tilde{E}|) - k_0 = \frac{i}{v_g} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma |\tilde{E}|^2$$

Lösungsverhalten der NLS-Gl.

Im Falle $\gamma = 0$ beschreibt Gl. (10) die Änderung von \tilde{E} und damit der Pulsform durch die Dispersion. ($|\tilde{E}|$ ist die "Umhüllende" des Pulses.) Neue Fourierkomponenten entstehen bei der linearen Ausbreitung natürlich nicht. Im Falle $\gamma \neq 0$ entstehen wegen der Zeitabhängigkeit von $|\tilde{E}|^2$ jedoch neue Fourierkomponenten: dieser Term beschreibt die in Abschn. 4.2.1 beschriebene "Selbstphasenmodulation".

Wie bereits erwähnt ist die NLS-Gl. eine der Grundgleichungen der nichtlinearen Physik²⁷. Sie ist mathematisch ausführlich untersucht worden und es ist bekannt, dass sie analytisch lösbar ist. Die Lösungen können mit der sogenannten "inversen Streumethode" gefunden werden. Es zeigt sich, dass es ein Soliton als Lösung gibt, d. h. eine Lösung, die im mitbewegten System zeitunabhängig ist. Sie entspricht also einem Puls, der sich trotz der Dispersion des Mediums ($\beta \neq 0$) formstabil ausbreitet. Genauer gesagt gibt es eine "kontinuierliche Familie" von Solitonen. Sie haben die Form

$$I(z, T) = I_0 \cdot \operatorname{sech}^2(T/T_0); \quad (\operatorname{sech}(x) = 1/\operatorname{ch}(x))$$

die Pulslänge T_0 und die Spitzenintensität sind dabei durch die Bedingung

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_{vac} \cdot \frac{\beta}{n_2} \cdot \frac{1}{T_0^2}$$

verknüpft; dabei ist λ_{vac} die Vakuumwellenlänge. Die Lösung erfordert also, dass n_2 und β das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Für Glas ist $n_2 > 0$ ($n_2 = 3,2 \cdot 10^{-20} m^2/W$); deshalb existiert ein Soliton in Glas nur, wenn die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit

²⁷Die grundlegende Arbeit ist V.E. Zakharov (in deutscher Transliteration: Sacharow) and A.B. Shabat, Sov. Phys. JETP 34, 63 (1972).

negativ ist. Dies ist für $\lambda > 1,3\mu$ der Fall²⁸.

Die benötigten Intensitäten werden in Glasfasern²⁹ leicht erreicht. Bei $1,55\mu$ und $T_0 = 1ps$ ergibt sich $I_0 = 0,4TW/m^2$. Diese Intensität herrscht in einer Einzelmodenglasfaser (effektive Querschnittsfläche $10^{-10}m^2$) bereits bei einer Leistung von $40W$.

Neben dem genannten fundamentalen Soliton existieren noch höhere Solitonen; diese breiten sich nicht formstabil aus, sondern sie ändern ihre Form periodisch. Für Pulse mit $T_0 = 1ps$ und $\lambda = 1,55\mu$ beträgt die Periodizitätslänge $27m$ (vgl. Abb. 6).

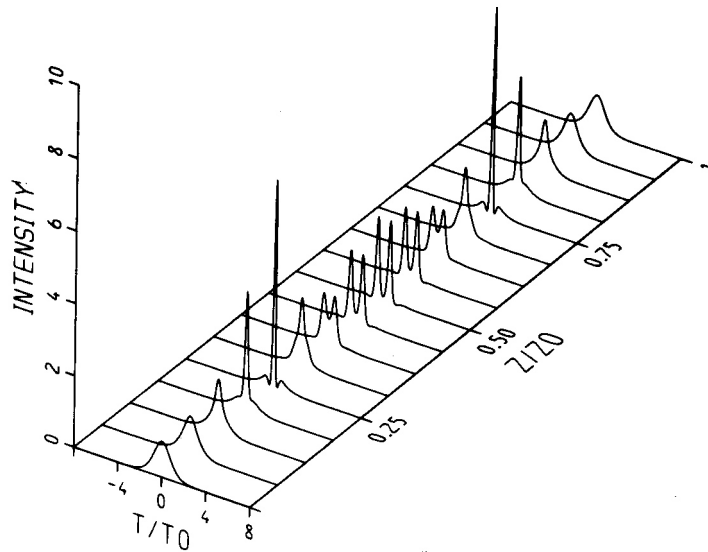


Abbildung 6: Zeitliche Entwicklung des Solitons 3. Ordnung über eine Periodizitätslänge.

4.2.3 Selbstinduzierte Transparenz

Die nichtlineare Schrödingergleichung beschreibt die Ausbreitung von Licht in Materie nur, solange die Absorption vernachlässigt werden kann. Für resonante Pulse ist sie völlig ungeeignet

Zur Behandlung der Ausbreitung resonanter Pulse muss die Polarisation mit Hilfe der Bloch-Gln. beschrieben und dann in die Maxwell-Gl. eingesetzt werden. In Analogie zu Abschnitt 4.1.1 ist es zweckmäßig die "Pulsfläche"

$$A(\bar{t}, z) = k \int_{-\infty}^{\bar{t} > t_0} \mathcal{E}(t, z) dt$$

²⁸Wir diskutieren hier "helle Solitonen" ("bright solitons"). Wenn n_2 und β gleiches Vorzeichen besitzen, sind "dunkle Solitonen" ("dark solitons") möglich. Dies sind Strukturen mit negativer Intensität auf einem konstanten Untergrund.

²⁹Die Solitonen ausbreitung in Glasfasern wird ausführlich behandelt in G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, 1989.

einzuführen (t_0 Pulsende). Für A findet man die Gleichung³⁰

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\bar{t}, z) = -\frac{1}{2} \alpha \cdot \sin A(\bar{t}, z). \quad (11)$$

Gl. (11) wird als "Area-Theorem" bezeichnet; α ist der Absorptionskoeffizient. Für kleine \mathcal{E} ist auch A klein und es gilt

$$\sin A \approx A.$$

Gl. (11) geht in diesem Fall über in

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\bar{t}, z) \approx -\frac{1}{2} \alpha A(\bar{t}, z),$$

eine spezielle Form des Beerschen Gesetzes. Offenbar gibt es dramatische Abweichungen vom Beerschen Gesetz im Fall $A = n \cdot \pi$ (n ganzzahlig): derartige Pulse können sich im

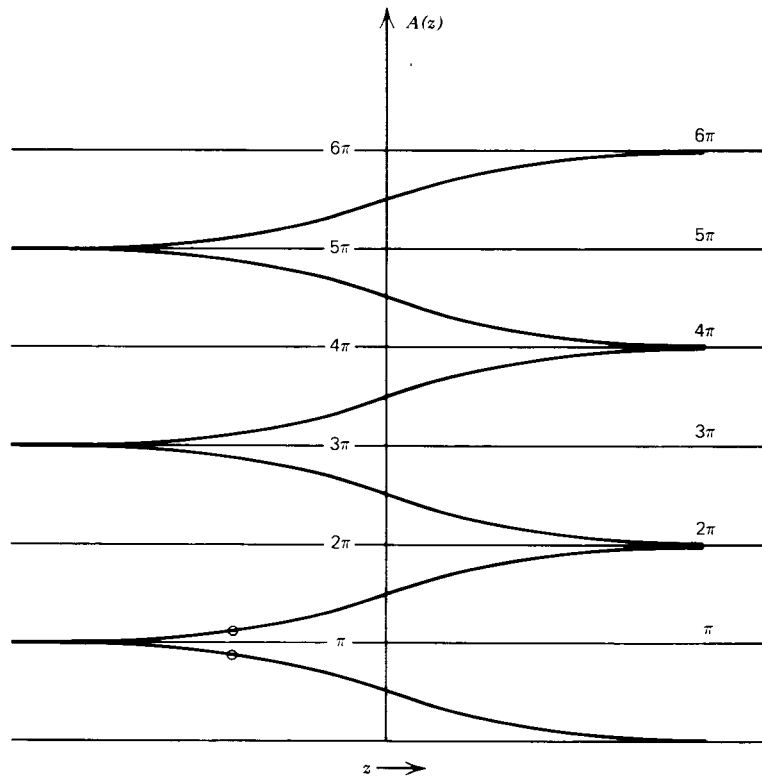


Abbildung 7: Analytische Lösungen der Gl. 11

absorptiven Medium verlustfrei ausbreiten. Für den Fall der $2n \cdot \pi$ -Pulse ist dies trivial: da diese das Medium im Grundzustand zurücklassen, wenn es ursprünglich im Grundzustand war, können sie auch keinen Energieverlust erleiden. Die verlustlose Ausbreitung der

³⁰Die Form der Gleichung hängt damit zusammen, dass im Fall $w_0 = -1$, $v_0 = 0$ die Lösung der "Quadraturkomponente" v des Dipolmomentes, die für die Absorption wesentlich ist, nach Gl. (3b) lautet: $v(\bar{t}, z) = -\sin A(\bar{t}, z)$. Eine ausführliche Behandlung findet man bei L. Allen, J.H. Eberly, *Optical Resonance and two-level atoms*. Chap. 4 and 5.

$n \cdot \pi$ -Pulse — insbesondere der 2π -Pulse — bezeichnet man als "selbstinduzierte Transparenz". Es hat nichts mit einer "Sättigung" des Mediums zu tun. Bei dieser sind nämlich die Hälfte aller Teilchen angeregt. Um diesen Zustand zu erreichen muß Energie aufgewandt werden; daher muß zwar im stationären Zustand nur gegen die spontane Emission angearbeitet werden, doch im transienten Fall sind beträchtliche Verluste unvermeidbar. Beim Durchgang eines 2π -Pulses durch ein Medium verbleibt in diesem jedoch keinerlei Anregung und – sofern der Puls kurz genug ist – tritt auch nur sehr wenig spontane Emission auf.

Das Lösungsverhalten von Gl. 11 ist in der Abb. dargestellt. Es zeigt sich, dass die $2n \cdot \pi$ -Pulse oder $2(n+1) \cdot \pi$ -Pulse stabil, die $(2n+1) \cdot \pi$ -Pulse dagegen instabil sind. Für Pulse mit $(2n+1)\pi < A < (n+1)2\pi$ wächst A sogar an!

Um zu verstehen, wieso $A(\bar{t}, z)$ zunehmen kann, muß man sich vergegenwärtigen, dass Pulse ihre Form ändern können. Eine Verdopplung der Pulslänge bei einer Abnahme von \mathcal{E} um den Faktor $1/\sqrt{2}$ ist mit dem Energiesatz vereinbar, führt aber zu einer Zunahme von A um $\sqrt{2}$! (Erwähnt sei, dass ein $0 \cdot \pi$ -Puls keineswegs die Energie Null enthalten muß!) Es zeigt sich, dass es auch im Resonanzfall solitonartige Lsgn. gibt. Diese ergeben sich aus Lösungen einer anderen nichtlinearen Wellengleichung als im nicht-resonanten Fall, der "Sine-Gordon-Gleichung". Sie hat die Form

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0.$$

Sie geht im Grenzfall $\phi \ll \pi/2$ in die bekannte Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi = 0$$

über. Die "selbstinduzierte Transparenz" ist experimentell überzeugend nachgewiesen worden. In den Experimenten hat sich gezeigt, dass $2n \cdot \pi$ -Pulse in n 2π -Pulse aufbrechen.

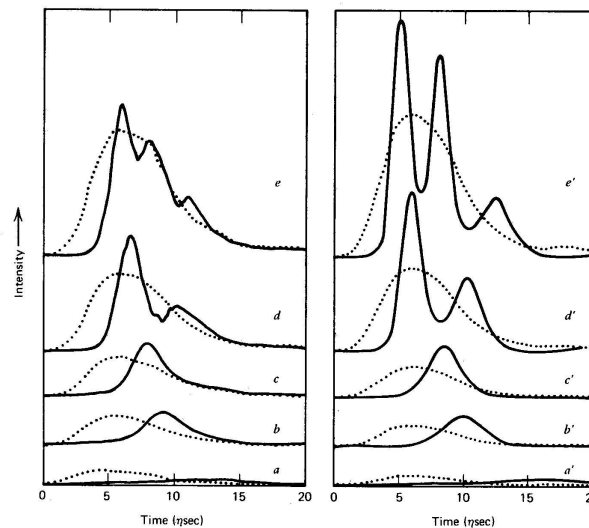


Abbildung 8: Eingangspulse und Ausgangspulse hinter einem Medium mit der optischen Dichte 5. Links: experimentell. Rechts: numerisch. Die Pulsflächen sind etwas kleiner als 2π , zwischen 2π und 3π , etwas kleiner als 5π und etwa 6π . Aus R.E. Slusher and H.M. Gibbs, Phys. Rev. A5, 1634 (1972)

Dies ist in guter Übereinstimmung mit numerischen Rechnungen (s. Abb. 8).