$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i\frac{\pi\alpha}{\lambda_3 n_3} A_1 A_2 e^{i[(k_1+k_2-k_3)z]} \tag{6c}$$

Gl. (6a)—(6c) werden als *gekoppelte Amplitudengln. ("coupled amplitude equations")* bezeichnet. Es handelt sich um *nichtlineare* Gleichungen, die nur für Spezialfälle einfach lösbar sind.

1. Spezialfall:

$$|A_3| \approx 0,\ |A_3(0)| = 0 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{\partial A_1}{\partial z}\right| \approx \left|\frac{\partial A_2}{\partial z}\right| \approx 0 \quad \text{nach Gl. 6a u. 6b.}$$

$A_1(z)$ und $A_2(z)$ können dann in Gl. 6c als Konstanten angesehen werden, so daß

$$A_3(z) = \frac{\pi\alpha}{\lambda_3 \cdot \Delta k \cdot n_3} \cdot A_1 A_2 (e^{i\Delta k \cdot z} - 1)$$

mit $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ ("phase mismatch", Phasenfehlanpassung).
Zur Berechnung der Intensität nutzen wir die Beziehung

$$(e^{i\xi} - 1)(e^{-i\xi} - 1) = 2(1 - \cos\xi) = 4\sin^2(\xi/2)$$

aus und erhalten damit

$$|A_3(z)|^2 = \frac{\pi^2\alpha^2 z^2}{\lambda_3^2 n_3^2} \cdot |A_1|^2 |A_2|^2 \cdot \mathrm{sinc}^2 x \tag{7}$$

mit $\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}$ und $x = \frac{\Delta k \cdot z}{2}$

Gl. (7) beschreibt einen Prozeß, bei dem die Wellen 1 und 2 mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 eingestrahlt werden, und die Summenfrequenz $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ erzeugt wird ("*Summenfrequenzerzeugung*"; vgl. Abb. 1).

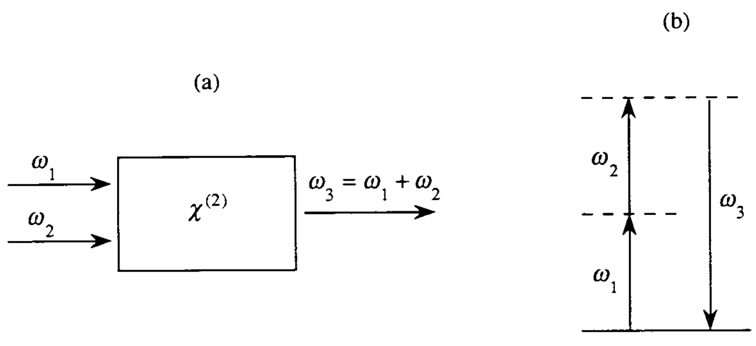

Abbildung 1: Summenfrequenzerzeugung (a) Schema (b) Energieverhältnisse

Folgerungen:
1. Für $\Delta k = 0$ ist

$$|A_3(z)|^2 \sim z^2.$$

(Dies gilt, solange der Abbau von A_1 und A_2 vernachlässigbar ist.)

2. Für $\Delta k \neq 0$ ist

$$|A_3(z)|^2 \sim \frac{1}{(\Delta k)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta k \cdot z}{2}\right).$$

Die Intensität wird also nur bis zu einem Maximalwert aufgebaut und dann wieder abgebaut. Der Maximalwert wird erreicht für $\Delta k \cdot z/2 = \pi/2$. Man bezeichnet die Größe

$$z_{max} = \pi/\Delta k$$

als *Kohärenzlänge*. Wenn sich $\Delta k = 0$ nicht ganz erreichen läßt, existieren also optimale Dicken L! (Vgl. hierzu auch Abb. 2)

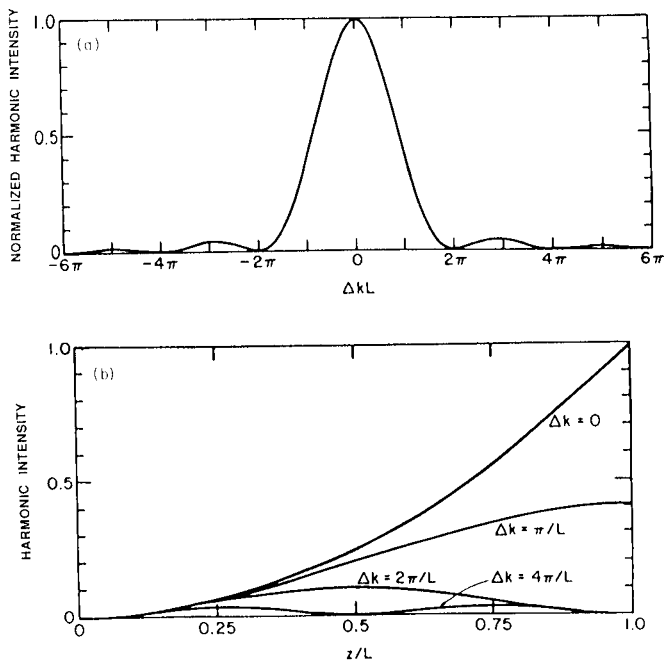

Abbildung 2: (a) Graph der Funktion $sinc^2 x(\Delta k \cdot L/2)$ (b) Erreichbare Intensitäten für verschiedene Δk–Werte.

3. Für große $|\Delta k|$ werden nur kleine Intensitäten in der 3. Welle erreicht:

$$|A_3|^2_{max} \sim \frac{1}{(\Delta k)^2}.$$

Deutung der Phasenanpassungsbedingung:

Im Medium breitet sich eine "nichtlineare Polarisationswelle" mit dem Wellenvektor k_p aus. An jedem Ort des Mediums entstehen neue Wellen mit den Frequenzen, mit denen die nichtlineare Polarisation oszilliert. Die an der Stelle z_1 entstandene Welle überlagert sich nur dann konstruktiv mit der an der beliebigen Stelle z_2 ($z_2 > z_1$) entstandenen, wenn die neuen Wellen und die nichtlineare Polarisatiionswelle sich mit der gleichen Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Ist jedoch $\pi/2 < (z_2 - z_1) \cdot |\Delta k| < 3/2\pi$ so interferiert die an der Stelle z_2 erzeugte Welle mit der an der Stelle z_1 erzeugten destruktiv.

Bei einem parametrischen Prozeß wird auf das Medium keine Energie übertragen. Es wird versucht zu argumentieren, daß dann auch kein Impuls übertragen werden kann, so daß im Strahlungsfeld selbst die Impulserhaltung gelten muß. Das führt dann wegen des Photonenimpulses z. B. bei der Summenfrequenzerzeugung auf die Bedingung

$$\hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2 = \hbar\vec{k}_3,$$

d. h. auf die Phasenanpassungsbedingung.

Bedeutung der Phasenanpassungsbedingung ("PM–Bedingung")

Es ist häufig schwierig, die PM–Bedingung zu erfüllen. (Zum Beispiel war sie bei dem 1. Experiment zur Frequenzverdopplung (Rubinlaser, Quarz) nicht erfüllt.) Trotzdem ist sie für die nichtlineare Optik eher segensreich: sie verhindert in aller Regel, daß mehrere nichtlineare Prozesse gleichzeitig ablaufen. Werden etwa zwei Wellen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 eingestrahlt, so ist gewöhnlich nur für die Summenfrequenzerzeugung

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

oder die Differenzfrequenzerzeugung

$$\omega_3 = |\omega_1 - \omega_2|$$

die PM–Bedingung erfüllt, und Prozesse höherer Ordnung, z. B.

$$\omega_4 = \omega_3 + \omega_1 = 2\omega_1 + \omega_2$$

oder

$$\omega_4^{'} = \omega_3 + \omega_2 = \omega_1 + 2\omega_2$$

treten nicht auf, da für sie i. a. die PM–Bedingung nicht erfüllt ist. Aus dem gleichen Grunde brauchen wir uns bei der Summenfrequenzerzeugung bspw. nicht um die Frequenzverdopplung zu kümmern. Nur aus diesem Grunde ist es überhaupt sinnvoll, eine "3–Wellen–Wechselwirkung" zu betrachten.

Anmerkung: Die gerade durchgeführten Rechnungen gelten ganz entsprechend auch für den Fall, daß die Wellen 1 und 3 eingestrahlt werden, so daß die Welle mit der Frequenz

$$\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$$

entsteht (*"Differenzfrequenz–Erzeugung"*; vgl. Abb. 3) sowie in ganz analoger Weise auch für die *Frequenzverdopplung*, (vgl. Abb. 4)

Bei der Frequenzverdopplung $\omega_3 = 2\omega_1$ lautet die Phasenanpassungsbedingung

$$k_3 = 2k_1$$

und in dem Fall, dass die Amplitude der Grundwelle 1 als konstant angesehen werden kann erhält man einen zu Gl. 7 analogen Ausdruck. Ein entsprechendes experimentelles Resultat zeigt Abb. 5.

2. Spezialfall: Parametrische Verstärker und "optische parametrische Oszillatoren" (OPOs)

Es werde die Welle 3 mit großer Intensität eingestrahlt ("Pumpwelle"). Weiter werde die

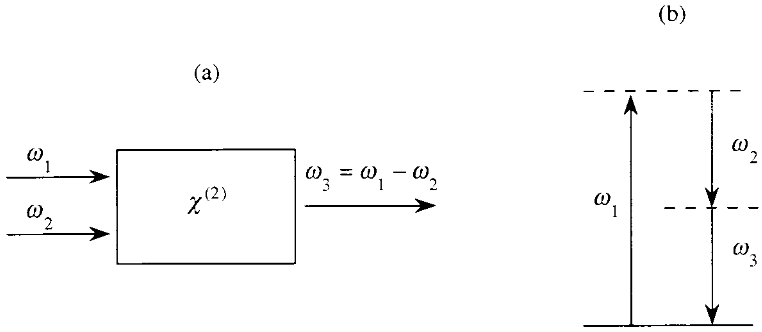

Abbildung 3: Differenzfrequenzerzeugung (a) Schema (b) energetische Verhältnisse

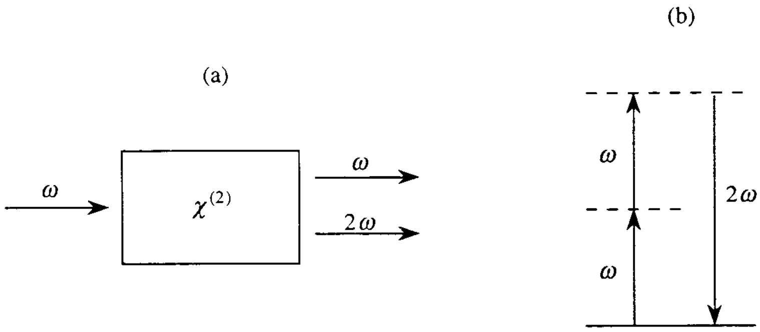

Abbildung 4: Frequenzverdoppler (a) Schema (b) energetische Verhältnisse

Welle 1 schwach mit der Amplitude E_0 eingestrahlt ("Signalwelle"). Es sei $\omega_1 < \omega_3$. Dann wird eine neue Welle mit der Frequenz $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ nach Gl. 6b aufgebaut ("Idler"–Welle; "idle" müßig, eitel)[5]

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{i\alpha\pi}{n_2\lambda_2} \cdot A_3 A_1^* \cdot e^{i(k_3-k_1-k_2)z}$$

Es sei jetzt die *Phasematching–Bedingung* $k_3 - k_1 - k_2 = 0$ erfüllt. Dann wird nach Gl. 6a und 6c:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{i\alpha\pi}{n_1\lambda_1} \cdot A_3 A_2^*$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{i\alpha\pi}{n_3\lambda_p} \cdot A_1 A_2$$

Solange die Wellen 1 und 2 schwach sind, ist in sehr guter Näherung $\partial A_3/\partial z \approx 0$ bzw. A_3=const. ("no pump wave depletion"). Damit folgt dann durch Differenzieren der DGl. für A_1 und Einsetzen von $\partial A_2^*/\partial z$:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} = \frac{\alpha^2\pi^2}{n_1 n_2 \lambda_1 \lambda_2} \cdot |A_3|^2 \cdot A_1 = g^2 \cdot A_1$$

[5] Der Fall der *parametrischen Verstärkung* unterscheidet sich von der Differenzfrequenzerzeugung dadurch, dass dort eine Welle mit der hohen Frequenz ω_3 und eine Welle mit der niedrigen Frequenz ω_1 *stark* eingestrahlt werden. Die relative Änderung der Amplitude der Welle mit der Frequenz ω_1 kann deshalb im Fall der Differenzfrequenzerzeugung meistens vernachlässigt werden, bei der parametrischen Verstärkung jedoch nicht.

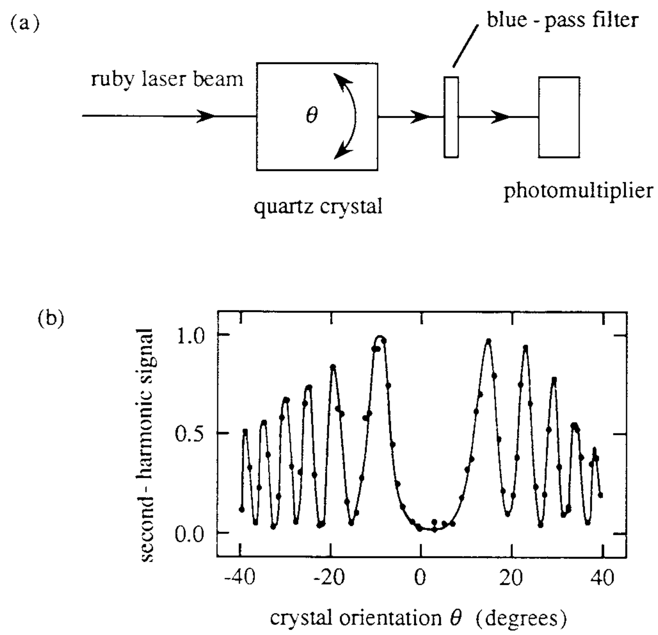

Abbildung 5: (a) Experimenteller Aufbau zur Untersuchung der Phasenanpassungsbedingung. In Quarz ist $\Delta k \neq 0$ und die Wechselwirkungslänge L kann durch Verkippen des Kristalls variiert werden. (b) Experimentelles Ergebnis

mit

$$g = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{n_1 n_2 \lambda_1 \lambda_2}} \cdot |A_3|.$$

Die allgemeine Lsg. dieser DGl. lautet

$$A_1(z) = C \cdot e^{gz} + D \cdot e^{-gz}.$$

Die Anfangsbedingungen sind $A_1 = E_0,\ \partial A_1/\partial z|_z = 0$, da $A_2(0) = 0$. Deshalb ist

$$A_1(z) = E_0 \cdot \cosh(gz).$$

Damit folgt

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{i\pi\alpha}{n_2\lambda_2} \cdot A_3 E_0 \cdot \cosh(gz)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} A_2(z) &= \frac{i\pi\alpha A_3}{n_2\lambda_2 \cdot g} \cdot E_0 \cdot \sinh(gz) \\ &= \sqrt{\frac{n_1\lambda_1}{n_2\lambda_2}} \cdot e^{i(\varphi_3 + \frac{\pi}{2})} \cdot E_0 \cdot \sinh(gz) \qquad (\varphi_3 = \arg(\tilde{E}(0))) \end{aligned}$$

Im wesentlichen wird also die "Signalwelle" exponentiell verstärkt; der "Verstärkungskoeffizient" g wächst mit der Wurzel aus der Intensität der Pumpwelle. Dieser Prozeß heißt "parametrische Verstärkung". Charakteristisch ist, daß eine Phasenanpassungsbedingung erfüllt sein muß und daß gleichzeitig mit der exponentiell anwachsenden Signalwelle eine "Idler"–Welle bei der Frequenz $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ entsteht, die ebenfalls exponentiell anwächst

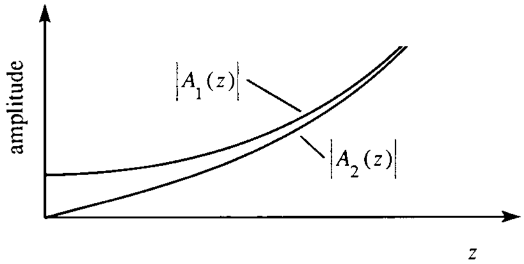

Abbildung 6: Änderung der Amplituden bei der parametrischen Verstärkung im "fast entarteten Fall" $\omega_1 \approx \omega_2$ für ortsunabhängige Pumpwelle und vollständige Phasenanpassung

(vgl. Abb. 6).

OPO: Die parametrische Verstärkung ist ein Mechanismus, der es genauso wie die induzierte Emission erlaubt, kohärente Strahlungsquellen aufzubauen. Bringt man nämlich ein parametrisch verstärkendes Medium in einen optischen Resonator, so kann sich genauso wie beim Laser "aus dem Rauschen" ein kohärentes Strahlungsfeld aufbauen. Diese Strahlungsquelle wird "optischer parametrischer Oszillator" (OPO) genannt (Abb. 7).

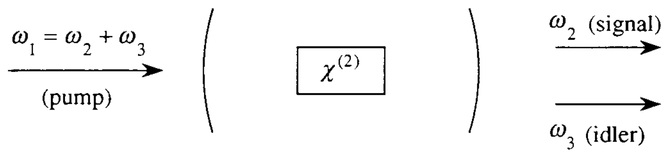

Abbildung 7: Prinzip des OPO

Vergleich: Laser — OPO

Genauso wie der Laser besitzt ein OPO eine Schwelle. Sie ist dadurch gegeben, daß die Verstärkung ausreichen muß, um die Resonatorverluste auszugleichen. Der Verstärkungsmechanismus ist daran gebunden, daß auch eine "Idler"–Welle entsteht ($E_2 = 0 \Rightarrow \partial E_1/\partial z = 0$). Eine niedrige Schwelle (nur kleine $|E_3|$ notwendig) wird daher nur erreicht, wenn sich die "Idler"–Welle gut aufbauen kann, d. h., wenn der Resonator gleichzeitig für Signal– und "Idler"–Welle resonant ist; das ist jedoch technisch kaum erreichbar.

Ein OPO besitzt gegenüber einem Laser den prinzipiellen Nachteil, daß er nicht inkohärent gepumpt werden kann, sondern daß die Pumpwelle kohärent sein muß. Dem steht als Vorteil gegenüber, daß die Emissionswellenlänge abstimmbar ist: grundsätzlich unterliegt die parametrische Verstärkung ja nur der Bedingung $0 < \omega_1 < \omega_3$.

Wie bei einem Laser wird die *genaue* Emissionsfrequenz durch die Lage der Resonatormoden bestimmt. Welche Mode anschwingt, hängt von der Frequenzabhängigkeit der Resonatorverluste ab — sie kann durch Abstimmelemente wie z. B. Prismen beeinflußt werden — und von der Frequenzabhängigkeit der Verstärkung. Die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung kann bei einem Laser kaum beeinflußt werden; daher erfordern abstimmbare Laser breite Verstärkungskurven. Das hat zur Folge, daß die Verluste stark frequenzabhängig gemacht werden müssen, um eine ausreichende Frequenzselektion zu erzielen. Die Frequenz der parametrischen Verstärkung wird hingegen durch die "phasematching"–

Bedingung festgelegt. Diese kann durch Variation der Temperatur oder der Orientierung des nichtlinearen Mediums innerhalb relativ weiter Grenzen einfach variiert werden (vgl. Kap. 2).

Der OPO hat lange Zeit nur eine geringe Rolle gespielt; dafür sind im wesentlichen Materialprobleme verantwortlich. Um eine effektive Konversion zu erzielen muß nämlich mit hohen Pumpintensitäten gearbeitet werden, die lange Zeit der Zerstörschwelle der nichtlinearen Kristalle sehr nahe kamen. (Die Zerstörschwelle ist eine Größe, die stark von der Qualität des individuellen Kristalles abhängt.) Weiter müssen die Kristalle sehr homogen sein, damit die "phasematching"–Bedingung im gesamten — hinreichend großen — Kristall einheitlich ist. Neuerdings sind OPOs sehr im Vordringen.

Anmerkungen zu Abschnitt 1.2.1
1. Es ist zu beachten, daß bei vielen Prozessen der NLO auch lineare Prozesse in den DGln. zusätzlich zu berücksichtigen sind. So ist häufig bei der Summenfrequenzerzeugung $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ die Absorption bei ω_3 nicht vernachlässigbar. Da aber

$$\left.\frac{\partial A_3}{\partial z}\right|_{Absorption} \sim A_3,$$

während

$$\left.\frac{\partial A_3}{\partial z}\right|_{NLO} \sim A_1 A_2,$$

kann die Absorption wg. $A_3(0) = 0$ für kleine z vernachlässigt werden.
2. Die Betrachtungen lassen sich auf den Fall nichtkollinearer Wellen unschwer verallgemeinern. Die PM–Bedingung geht dann einfach über in die Vektorgleichung

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_3 = 0.$$

3. Auch wesentlich allgemeinere Fälle als die oben behandelten sind noch analytisch lösbar. Es ergibt sich im allgemeinen, daß sehr wirksame nichtlineare Frequenzumsetzungen stattfinden, sofern die PM–Bedingung erfüllt ist. Werden etwa eine starke und eine schwache Welle eingestrahlt und die PM–Bedingung ist für die Summenfrequenzerzeugung erfüllt, so findet diese statt, bis keine Photonen der schwachen Welle mehr vorhanden sind. Sobald diese verbraucht sind, findet Differenzfrequenzbildung zwischen der erzeugten Welle auf der Summenfrequenz und der starken Welle statt, bis keine Photonen auf der Summenfrequenz mehr vorhanden sind, usw.

1.2.2 Wechselwirkung von Wellen in kubischen Medien ($\chi^{(3)} \neq 0; \chi^{(2)} = 0$).

Wir betrachten jetzt den Fall $\chi^{(3)} \neq 0$, $\chi^{(2)} = 0$. Wenn drei ebene Wellen

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cdot e^{i(\vec{k}_i\vec{r} - \omega_i t)} + c.c. \quad (i = 1, 2, 3)$$

eingestrahlt werden und eine vierte Welle erzeugt wird, die die Form

$$E_4(\vec{r}, t) = A_4 \cdot e^{i(\vec{k}_4\vec{r} - \omega_4 t)} + c.c.$$