Nichtlineare Optik

W. Lange

SS 2005

Inhalt

Literaturauswahl

N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*. 4th Edition, World Scientific, 1996 (fast unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1965)

H. Paul, *Nichtlineare Optik I und II*. WTB, Akademie-Verlag Berlin, 1973 (vergriffen?)

M. Schubert / B. Wilhelmi, *Einführung in die nichtlineare Optik I und II*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1971 / 1978 (vergriffen?)

F. Zernike and J.E. Midwinter, *Applied Nonlinear Optics*. Wiley, 1973

Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley, New York, 1984 (Standardwerk!)

M. Schubert / B. Wilhelmi, *Nonlinear Optics and Quantum Electronics*. Wiley, 1986

F.A. Hopf and G.I. Stegeman, *Applied Classical Electrodynamics, Vol. 2: Nonlinear Optics*. Wiley, 1986

A. Yariv, *Quantum Electronics*. Third Edition, Wiley, New York, 1989 (nur ein sehr kleiner Teil des Buches befaßt sich mit nichtlinearer Optik)

P.N. Butcher and D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 1991

D.L. Mills, *Nonlinear Optics: Basic Concepts*. Springer, Berlin, Heidelberg 1991

J.V. Moloney and A.C. Newell: *Nonlinear Optics*. Addison Wesley, 1992. (Rein theoretisch)

R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*. Academic Press, Inc., San Diego, 1992

Werke über spezielle Aspekte:

L. Allen and J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Wiley 1975 (Standardwerk in Zusammenhang mit Blochvektoren und transienten Phänomenen)

D.C. Hanna, M.A. Yuratich, and D. Cotter, *Nonlinear Optics of Free Atoms and Molecules*. Springer 1981.

N. Bloembergen, *Nonlinear Optics and Spectroscopy*. Science, Vol. 216, p. 1057-1064 (1982) (Nobelpreisvortrag)

P.A. Fischer (Ed.), *Optical Phase Conjugation*. Academic Press 1983.

J.F. Reintjes, *Optical Parametric Processes in Liquids and Gases*. Academic Press, Inc., San Diego, 1984

H. Eichler, *Laser Induced Dynamic Gratings*. Springer 1986 (Phasenkonjugation).

M.D. Levenson and S.S. Kano, *Introduction to Nonlinear Laser Spectroscopy*. Academic Press, Inc., San Diego, 1988

G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, Inc., San Diego, 1989 (Standardwerk)

W. Demtröder, *Laserspektroskopie*. 3. Aufl., Springer 1993 (Standardwerk)

P. Mandel, *Theoretical Problems in Cavity Nonlinear Optics*. Cambridge University Press. Cambridge 1997.

1 Phänomenologische skalare nichtlineare Optik

1.1 Die nichtlineare Wellengleichung

Ausgangspunkt sind, wie immer in der Optik, die Maxwell–Gln.:

$$rot\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$rot\vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}$$

$$div\vec{B} = 0; \quad div\vec{D} = \rho$$

In Isolatoren ist die Stromdichte $\vec{j} = 0$. Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

folgt dann

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = const.$$

Da mit konstantem ρ nur stationäre Felder verbunden sind, können wir o. B. d. A. setzen

$$\rho = 0.$$

Aus den Maxwell–Gl. folgt mit $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

$$rotrot\vec{E} = -\mu\mu_0 \cdot \frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}.$$

Wir benutzen die Umformung

$$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E}$$

Wenn zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ der Zusammenhang

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \qquad (\epsilon \text{ skalar})$$

besteht, so wird mit $\rho = 0$ auch

$$div\vec{E} = 0.$$

Dies wird in der NLO meistens auch für den allgemeinen Fall angenommen und wird im folgenden vorausgesetzt. Zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ besteht grundsätzlich der materialabhängige Zusammenhang

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{P}$ kann nichtlinear von der Feldstärke abhängen und wird – auch in der linearen Optik – nicht nur vom Momentanwert der Feldstärke bestimmt, sondern innerhalb der Gedächtniszeit des Mediums auch von der gesamten Vergangenheit.

Setzen wir noch $\mu = 1$ (in den meisten optisch wichtigen Materialien erfüllt), so erhalten wir allgemein

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_o}}\ \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}\right) \tag{1}$$

Wir wollen in den ersten drei Kapiteln grundsätzlich voraussetzen, daß ein stationäres Lichtfeld eingestrahlt wird und daß sich unter seiner Wirkung eine stationäre Polarisation einstellt.
In der linearen Optik ist in isotropen Medien bei stationärer Einstrahlung

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\cdot\vec{E} = \epsilon_0\cdot\chi\cdot\vec{E},$$

und wir erhalten die bekannte (homogene) Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

mit

$$v = c/n,\ n = \sqrt{\epsilon}.$$

In den intensiven Feldern, wie sie mit Lasern erzeugt werden können, läßt sich formal schreiben

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(\vec{E} + \chi^{(1)}\vec{E}) + P^{NL}$$

mit

$$\vec{P}^{NL} = \vec{P} - \epsilon_0\chi^{(1)}\vec{E}.$$

Hierbei ist $\chi^{(1)}$ die "lineare Suszeptibilität", d. h. die Suszeptibilität der linearen Optik. $\vec{P}^{NL}$ stellt also den nichtlinearen Anteil der Polarisation dar. Damit wird aus der (allgemein gültigen) Gl. 1 die nichtlineare Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{2}$$

(Nichtlineare Wellengleichung = lineare Wellengleichung + nichtlinearer Quellterm).
Die wichtigste Konsequenz von $\vec{P}^{NL}$ ist: weder für die räumlichen noch für die zeitlichen Fourierkomponenten gilt das Superpositionsprinzip! In vielen Fällen kann man den Wert von P in eine Potenzreihe nach der elektrischen Feldstärke entwickeln und erhält dann[1]

$$P^{NL} = \epsilon_0(\chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \ldots)$$

[1] Zu beachten ist, daß die "nichtlinearen Suszeptibilitäten" $\chi^{(2)}$ und $\chi^{(3)}$ dimensionsbehaftet sind. Wenn wir die Reihe für P^{NL} als Vektorgleichung schreiben wollen, dann kommen wir allerdings in Schwierigkeiten; dieses Problem wird sich in Kap. 2 auflösen. Es kommt nur relativ selten vor, daß in der Reihenentwicklung von P^{NL} mehr als das quadratische und das kubische Glied berücksichtigt werden müssen.

1.2 Ebene Wellen in schwach nichtlinearen Medien

Voraussetzungen:
(1) Ebene Wellen mit diskreten Fourierkomponenten
(2) $\vec{E} \parallel \vec{P}$
(3) Vernachlässigung der Magnetisierung
(4) Der nichtlineare Anteil der Polarization des Mediums sei klein

Wir betrachten den Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

und interessieren uns für $\nabla\vec{S}$ bzw. für den zeitlichen Mittelwert $\left\langle \nabla\vec{S} \right\rangle$.
Bekanntlich ist:

$$\nabla(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H}\, rot\, \vec{E} - \vec{E}\, rot\, \vec{H}$$

Übernehmen wir aus den Maxwell.–Gln.

$$rot\, \vec{H} = \dot{\vec{D}},\ rot\, \vec{E} = -\dot{\vec{B}},$$

so ergibt sich also

$$\nabla\vec{S} = -\vec{E}\dot{\vec{D}} - \vec{H}\dot{\vec{B}}.$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0\vec{H} + \vec{M} \approx \mu_0\vec{H} \end{aligned}$$

folgt

$$\nabla\vec{S} = -\vec{E} \cdot \dot{\vec{P}} - \epsilon_0\vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} - \mu_0\vec{H} \cdot \dot{\vec{H}}$$

Offenbar gilt $\left\langle \vec{E}\dot{\vec{E}} \right\rangle = \left\langle \vec{H}\dot{\vec{H}} \right\rangle = 0$, falls <u>diskrete Fourierkomponenten</u> vorhanden sind.
Damit ergibt sich

$$\left\langle \nabla\vec{S} \right\rangle = -\left\langle \vec{E} \cdot \dot{\vec{P}} \right\rangle \tag{3}$$

Wenn $\nabla\vec{S} \neq 0$, so bedeutet das, dass im Strahlungsfeld eine Quelle oder eine Senke für Energie vorhanden ist: es wird Energie zwischen dem Strahlungsfeld und dem Medium ausgetauscht.
Wenn wir den Ansatz $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ und $\vec{P} = \sum_k \vec{P}_k$ mit $\vec{E}_i \sim \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $\vec{P}_k \sim \cos(\omega_k t + \psi_k)$ machen, so folgt aus Gl. 3:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla\vec{S} \right\rangle &= -\left\langle \sum_{i,k} \vec{E}_i \cdot \dot{\vec{P}}_k \right\rangle = -\sum_{i,k} \left\langle \vec{E}_i \cdot \dot{\vec{P}}_k \right\rangle \\ &= -\sum_i \left\langle \vec{E}_i \cdot \dot{\vec{P}}_i \right\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Hierbei haben wir o. b. d. A. vorausgesetzt: $\omega_i \neq \omega_k$ für $i \neq k$. Wir definieren

$$\left\langle \nabla \vec{S}_i \right\rangle = \left\langle \vec{E}_i \cdot \dot{\vec{P}}_i \right\rangle \quad (\vec{S}_i \,\text{Poyntingvektor der Teilwelle}\, i)$$

Offenbar ist $\vec{S}_i$ der Poyntingvektor der i–ten Teilwelle. Man sollte sich merken: die i–te Teilwelle leistet im zeitlichen Mittel nur an der ω_i–Komponente der Polarisation Arbeit!
Aber: Die Polarisationskomponente $\vec{P}_i$ braucht nicht durch $\vec{E}_i$ hervorgerufen zu sein, sondern kann von anderen Frequenzkomponenten erzeugt sein.

Komplexe Amplituden [2]:

$$E = \tilde{E}e^{-i\omega t} + \tilde{E}^* e^{+i\omega t}$$

$$P = \tilde{P}e^{-i\omega t} + c.c.$$

(beachte: $e^{-i\omega t}$, Fehlen von 1/2!)
In dieser Schreibweise ist

$$\begin{aligned} \langle \nabla S_i \rangle &= \left\langle (\tilde{E}_i e^{-i\omega_i t} + \tilde{E}_i^* e^{i\omega_i t})(-i\omega_i \tilde{P}_i e^{-i\omega_i t} + i\omega \tilde{P}_i^* e^{i\omega_i t}) \right\rangle \\ &= i\omega_i (\tilde{E}_i \tilde{P}_i^* - \tilde{E}_i^* \tilde{P}_i), \end{aligned}$$

das heißt

$$\langle \nabla S_i \rangle = -2\omega_i Im(\tilde{E}_i^* \cdot \tilde{P}_i) \tag{5}$$

Lineare Optik:

$$\tilde{P} = \epsilon_0 \chi \tilde{E} \rightarrow \langle \nabla S \rangle = -2\omega\epsilon_0 |\tilde{E}|^2 \cdot Im(\chi)$$

$Im(\chi) > 0 \;\rightarrow\;$ Energieabsorption
$Im(\chi) < 0 \;\rightarrow\;$ Verstärkung

Nichtlinearer Fall:
Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten

$$(a) \quad \langle \nabla S \rangle = \sum_i \langle \nabla S_i \rangle \neq 0$$

Das bedeutet: Energieabgabe oder –aufnahme des Strahlungsfeldes, bzw. das materielle System nimmt Energie auf oder gibt Energie ab.

$$(b) \quad \langle \nabla S_i \rangle \neq 0, \quad \text{aber } \langle \nabla S \rangle = 0$$

Das bedeutet: keine Energieaufnahme oder –abgabe des materiellen Systemes, aber das Medium wirkt als Mittler zwischen den verschiedenen Frequenzkomponenten (”parametrische Effekte”, ”parametrische Prozesse”)

[2] Im folgenden werden die auftretenden Vektoren nicht ausdrücklich als solche gekennzeichnet, da wir eine skalare Betrachtung vornehmen wollen. Es wird also insbesondere vorausgesetzt, dass alle auftretenden transversalen Vektoren die gleiche Richtung haben. Die hier eingeführten komplexen Amplituden enthalten noch die volle Ortsabhängigkeit der Wellenausbreitung, im Gegensatz zu den später eingeführten komplexen Größen A.

Beispiele:
(a) <u>kubische</u> Nichtlinearitäten $\chi^{(3)} \neq 0$, nur 2 Felder ("2–Wellen–Wechselw."), kollineare Ausbreitung in z–Richtung

$$E = \tilde{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \tilde{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad \text{mit} \quad \tilde{E}_i = A_i \cdot e^{ik_i z}$$

Auch die Amplituden A_i sind komplex. In $P^{NL} = \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3$ gibt es Anteile der Form

$$P_1^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega_1; \omega_1, \omega_2, -\omega_2) A_1 A_2 A_2^* \cdot (e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}),$$

die mit der Frequenz ω_1 oszillieren[3]. Daraus folgt

$$\langle \nabla S_1 \rangle = -2\omega_1 \epsilon_0 |\tilde{E}_1|^2 |\tilde{E}_2|^2 \cdot Im(\chi^{(3)}(\omega_1; \omega_1, \omega_2, -\omega_2))$$

Weiter gibt es Anteile der Form:

$$P_2^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega_2; \omega_2, \omega_1, -\omega_1) A_2 A_1 A_1^* \cdot (e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}),$$

die mit der Frequenz ω_2 oszillieren. Daraus folgt

$$\langle \nabla S_2 \rangle = -2\omega_2 \epsilon_0 |\tilde{E}_1|^2 |\tilde{E}_2|^2 \cdot Im(\chi^{(3)}(\omega_2; \omega_2, \omega_1, -\omega_1))$$

Im allgemeinen ist $\langle \nabla S_i \rangle \neq 0$, d. h. es liegt eine Steuerung der Energieaufnahme bei ω_1 durch E_2 und bei ω_2 durch E_1 vor.
Als Beispiele hierfür werden wir in Kap. 3 kennenlernen: *Zweiphotonenabsorption, stimulierter Ramaneffekt, inverser Ramaneffekt.*
Alle diese Prozesse sind <u>keine</u> parametrischen Prozesse.

(b) $\chi^{(2)} = \alpha \neq 0$, genau drei Wellen in z–Richtung ("3–Wellen–Wechselwirkung")
Speziell sei α reell. $A_i(z)$ sei allenfalls schwach ortsabhängig

$$E = \sum_{i=1}^{3} A_i(z) exp[i(k_i z - \omega_i t)] + c.c.; \quad \text{mit den Frequenzen} \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\begin{aligned}
P = \epsilon_0 \alpha E^2 \quad &= \quad \epsilon_0 \alpha \left\{ A_3 A_2^* exp \left\{ i[(k_3 - k_2)z - (\omega_3 - \omega_2)t] \right\} \right. \\
&\quad + A_3 A_1^* exp \left\{ i[(k_3 - k_1)z - (\omega_3 - \omega_1)t] \right\} \\
&\quad \left. + A_1 \cdot A_2 exp \left\{ i[(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t] \right\} \right\} \\
&\quad + c.c \\
&\quad + \text{weitere Terme mit } 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3, \omega_1 + \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \ldots \\
&= \quad P_1(z,t) + P_2(z,t) + P_3(z,t) + \; c.c. + \; \text{weitere Terme}
\end{aligned}$$

Die Komponente P_1 oszilliert mit $\omega_3 - \omega_2 = \omega_1$, die Komponente P_2 mit $\omega_3 - \omega_1 = \omega_2$ und die Komponente P_3 mit $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Damit ergibt sich für die Größen $\langle \nabla S_i \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla S_1 \rangle &= -2\omega_1 \epsilon_0 \alpha Im(A_1^* A_2^* A_3 e^{i(k_3 - k_1 - k_2)z}) \\
\langle \nabla S_2 \rangle &= -2\omega_2 \epsilon_0 \alpha Im(A_2^* A_1^* A_3 e^{i(k_3 - k_2 - k_1)z}) \\
\langle \nabla S_3 \rangle &= -2\omega_3 \epsilon_0 \alpha Im(A_3^* A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z}) \\
&= +2\omega_3 \epsilon_0 \alpha Im(A_1^* A_2^* A_3 e^{i(k_3 - k_1 - k_2)z})
\end{aligned}$$

[3]Das erste Argument von $\chi^{(3)}$ gibt an, mit welcher Frequenz der betreffende Anteil von $P^{(3)}$ oszilliert; die weiteren Argumente weisen auf die Frequenzen der beteiligten Feldkomponenten hin.

Aus diesen Beziehungen folgt:

$$(\alpha) \quad \langle \nabla S \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla S_i \rangle \right\rangle = 0$$

Es handelt sich also um einen parametrischen Prozeß. Dies ist eine Folge davon, daß wir α reell und frequenzunabhängig angesetzt haben. [4]

$$(\beta) \quad -\frac{\langle \nabla S_1 \rangle}{\omega_1} = -\frac{\langle \nabla S_2 \rangle}{\omega_2} = +\frac{\langle \nabla S_3 \rangle}{\omega_3} \quad \text{"Manley–Rowe–Beziehungen"}$$

Die Größen $\langle \nabla S_i \rangle / \hbar\omega_i$ stellen eine Änderung der Photonenflußdichte bei der Frequenz ω_i dar; die Manley–Rowe–Beziehungen sind daher mit der Photonenvorstellung vereinbar.

1.2.1 Wechselwirkung von Wellen in quadratischen Medien ($\chi^{(2)} \neq 0$)

Die parametrische Wechselwirkung von zwei ebenen Wellen, die eine dritte erzeugen (Dreiwellenwechselwirkung), soll näher betrachtet werden.
Es sei $\chi^{(2)} = \alpha$ reell. $\chi^{(2)}$ ist praktisch immer so klein, daß nur eine geringe Abweichung von der linearen Optik auftritt. Die Frequenzkomponenten der Lösung der nichtlinearen Wellengleichung können dann in der Form

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k}_i \vec{r} - \omega_i t)} + c.c.$$

geschrieben werden; dabei sind die $\vec{k}_i$ die Wellenvektoren, die sich ohne Nichtlinearität ergäben und durch den linearen Anteil von P bestimmt sind; die Nichtlinearität führt nur zu einer langsamen Variation der komplexen Amplituden. Die beiden eingestrahlten Wellen

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k}_i \vec{r} - \omega_i t)} + c.c. \qquad (i = 1, 2)$$

erzeugen einen Anteil

$$\Delta P^{NL} = \epsilon_0 \alpha (A_1(\vec{r}) A_2(\vec{r}) e^{i[(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{r} - (\omega_1 + \omega_2)t]} + c.c.)$$

an der nichtlinearen Polarisation, d. h. eine Polarisationswelle mit der Frequenz ω_3 und dem Wellenvektor

$$\vec{k}_p = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$$

läuft durch das Medium. Dies führt zum Auftreten von neuen Wellen

$$E_3 = A_3(\vec{r}) \cdot e^{i(\vec{k}_3 r - \omega_3 t)} + c.c.$$

mit der Frequenz $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ und der Wellenzahl $k_3 = n_3 \omega_3 / c$; dabei ist n_3 der (lineare) Brechungsindex bei der Frequenz ω_3. Die Ausbreitungsrichtung der neuen Welle(n) ist zunächst unbekannt. Nach Gl. 5 gilt für den Energieumsatz der Komponente bei der Frequenz ω_3

$$\langle \nabla S_3 \rangle = -2\omega_3 \epsilon_0 \alpha \cdot Im \left[A_1 A_2 A_3^* e^{i(\vec{k}_p - \vec{k}_3)\vec{r}} \right]$$

[4] Tatsächlich läßt sich zeigen, daß in allen drei Gleichungen für den Energieumsatz der gleiche Wert α stehen muß, wenn α reell ist.

$\vec{k}_p$ ist der Wellenvektor, mit dem die nichtlineare Polarisation sich im Medium ausbreitet. Wir machen jetzt den Ansatz

$$A_i(\vec{r}) = |A_i(\vec{r})|e^{i\varphi_i(\vec{r})}.$$

Dann können wir schreiben

$$\langle \nabla S_3 \rangle = -2\omega_3\epsilon_0\alpha \cdot |A_1(\vec{r})||A_2(\vec{r})||A_3(\vec{r})| \cdot \sin\left[(\vec{k}_p - \vec{k}_3)\vec{r} + \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) - \varphi_3(\vec{r})\right]$$

Da $A_i(\vec{r})$ und damit auch die Phasenfaktoren $\varphi_i(\vec{r})$ nur schwach ortsabhängig sind, ergibt sich für die Welle 3 nur dann über große räumliche Bereiche eine Energieaufnahme oder –abgabe, wenn

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_3 \approx 0.$$

Diese Bedingung bezeichnet man als "*Phasenanpassungsbedingung*" ("*phase–matching"–Bedingung*). Aus der Bedingung folgt sofort, daß die neue Welle in $+z$–Richtung läuft, wenn die beiden eingestrahlten Wellen kollinear in $+z$–Richtung laufen. Insbesondere kann keine in $-z$–Richtung laufende Welle auftreten. Zu beachten ist, daß wegen der Dispersion des Mediums im allgemeinen

$$k_p = k_1 + k_2 = \frac{1}{c}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \neq k_3 = \frac{n_3}{c}(\omega_1 + \omega_2),$$

so daß mit einer gewissen Fehlanpassung zu rechnen ist. Die Welle 3 wird dann über eine gewisse Laufstrecke aufgebaut und anschließend wieder abgebaut. Die exakten Lösungen können wir auf diese Weise allerdings nicht bestimmen. Dafür müssen wir vielmehr unmittelbar die Amplitude betrachten.

DGln. für komplexe Amplituden bei der 3–Wellenwechselwirkung

Ansatz

$$E_i(z,t) = A_i(z) \cdot e^{i(k_i z - \omega_i t)} + c.c.$$

(Kollineare ebene Wellen in z–Richtung)
$A_i(z)$ sei "langsam" variabel, d. h.

$$|\partial^2 A_i/\partial z^2| << |k_i \cdot \partial A_i/\partial z|, |k_i^2 A_i|$$

("slowly varying envelope approximation" — SVEA)
$\Rightarrow$ Aus Gl. 2 folgt für die mit ω_1 oszillierenden Komponenten

$$-\left[k_1^2 A_1 - 2ik_1\frac{\partial A_1}{\partial z}\right] e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + \frac{\epsilon\omega_1^2}{c^2}A_1 e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} = -\frac{\omega_1^2}{c^2}\alpha A_2^* A_3 \cdot e^{i[(k_3 - k_2)z - \omega_1 t]}$$

Mit $\epsilon\omega_1^2/c^2 = k_1^2$ und $ik_1/2n_1^2 = \frac{i\pi}{\lambda_1 n_1}$, λ_1Vakuumwellenlänge ergibt sich daraus

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{i\omega_1^2}{2k_1c^2}\alpha A_2^* A_3 e^{i[(k_3-k_2-k_1)z]} = \frac{i\pi\alpha}{\lambda_1 n_1} \cdot A_2^* A_3 e^{i[(k_3-k_2-k_1)z]} \tag{6a}$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = i\frac{\pi\alpha}{\lambda_2 n_2} A_1^* A_3 e^{i[(k_3-k_1-k_2)z]} \tag{6b}$$