Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 22.12.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 11

Abgabe: Freitag, 12.01.2018, 10:00

Aufgabe 1 (Euler-Lagrange Gleichung) (**5 Punkte**)
Verallgemeinern Sie die Aussage von Satz 2.1 der Vorlesung für den Fall $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ und

$$(P) \quad \inf_{u \in X} \left\{ F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), u'(x), \cdots, u^{(k)}(x))\, \mathrm{d}x \right\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und

$$X := \{u \in C^k([a, b]) : \ u^{(j)}(a) = \alpha_j, \ u^{(j)}(b) = \beta_j \quad \forall\, 0 \le j \le k-1\}$$

mit Konstanten $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (**5 Punkte**)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand und sei $W : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$W(z) := \left(z^2 - 1\right)^2.$$

Sei weiter $g \in L^2(\Omega)$ und sei $F : W^{1,4}(\Omega) \to [0, +\infty)$ definiert durch

$$F(u) := \int_\Omega \left(|\nabla u|^4 + W(u) - gu^2 \right) \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass das Problem

$$(P) \quad \inf\{F(u) : \ u \in W^{1,4}(\Omega)\}$$

eine Lösung $\bar{u} \in W^{1,4}(\Omega)$ besitzt.

Aufgabe 3 (Poincaré-Ungleichung) (**5 Punkte**)
Sei $1 \le p \le \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und mit Lipschitz Rand. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p} \le C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

wobei $(u)_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, \mathrm{d}x$.
Hinweis. Nutzen Sie das folgende Kompaktheitsresultat von Rellich-Kondrachov: Ist $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand, und ist (u_k) eine Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le C$ für ein $C > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, so existieren ein $u \in L^p(\Omega)$ und eine Teilfolge (u_{k_j}) mit $u_{k_j} \to u$ stark in $L^p(\Omega)$.

Aufgabe 4 (Direkte Methode der Variationsrechnung) (**5 Punkte**)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und mit Lipschitz Rand. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \xi)$ mit

(i) $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ ist konvex für alle $(x, u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Es existieren $p > q \ge 1$ und Konstanten $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x, u, \xi) \ge \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Sei weiter

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei schließlich $\alpha \in \mathbb{R}$ und $X := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,\mathrm{d}x = \alpha\}$. Zeigen Sie mittels der direkten Methode der Variationsrechnung, dass das Problem

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} F(u)$$

eine Lösung $\bar{u} \in X$ besitzt.